

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

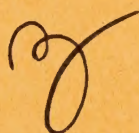
pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès-SCIENCES

par

Yves THOMAS

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'ETUDE ET A LA MISE EN OEUVRE
D'UNE REGULATION OPTIMALE DYNAMIQUE FONCTIONNELLE.

Applications à un générateur de vapeur à circulation naturelle

Soutenue le 2 avril 1971 devant la Commission d'Examen

R. MEZENCEV Président

M.Y. BERNARD

R. PERRET

J.F. LE CORRE

R. CHAUSSARD

P. GODIN

} Examineurs

THESE

Présentée devant l'UNIVERSITÉ DE CHICAGO

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

par

YVES THOMAS

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE ET À LA MISE EN ŒUVRE
D'UNE RÉGULATION OPTIMALE DYNAMIQUE FONCTIONNELLE
APPLIQUÉE À LA GÉNÉRATION DE MOUVEMENTS

Soutenue le 2 avril 1971 devant la Commission d'examen

M. Y. BERNARD
R. PÉREZ
J. P. LE CORRE
R. CHAUSSARD
P. CODIN

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

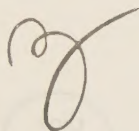
pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès-SCIENCES

par

Yves THOMAS

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'ETUDE ET A LA MISE EN OEUVRE
D'UNE REGULATION OPTIMALE DYNAMIQUE FONCTIONNELLE.
Applications à un générateur de vapeur à circulation naturelle

Soutenue le 2 avril 1971 devant la Commission d'Examen

R. MEZENECY Président

M.Y. BERNARD	} Examineurs
R. PERRET	
J.F. LE CORRE	
R. CHAUSSARD	
P. GODIN	



UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

• • • • •

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs

M. BRILLOUET

Mathématiques

M. MOLINARO

"

M. PAUC

"

M. PETRESCO

"

M. RAFFIN

"

M. VIVIER (E.N.S.M.)

"

M. TARDY (E.N.S.M.)

Mécanique

M. RAVILLY (E.N.S.M.)

"

M. AVIGNON

Physique

M. BOULLLOUD

"

M. COLLET

"

M. MINN

"

M. MEZEN CEV (E.N.S.M.)

"

M. MOUTON

"

M. DUNOYER

Chimie

M. GRAFF

"

M. PIERI

"

M. QUINIOU

"

M. WOJTKOWIAK

"

Mlle DEBRAU X

Biologie

M. GARRIGUES

"

Mme LE DOUARIN

"

M. LE DOUARIN

"

M. SELLIER

"

M. CAVET

Sciences de la Terre

AVANT PROPOS

La part importante et grandissante que prend, depuis quelques années, l'automatique dans le monde industriel et économique souligne assez ce privilège dont jouissent les automaticiens pour qui la recherche, tout en faisant appel à des théories avancées et variées, conduit aussi à des applications pratiques à court terme.

S'inscrivant dans le cadre d'une telle recherche, le présent mémoire s'est proposé d'apporter une contribution, si mince soit elle, à la régulation de demain des processus dynamiques.

Afin de réduire et de faciliter la transition entre les travaux à caractère théorique et les applications pratiques qui en peuvent découler, nous nous sommes le plus souvent efforcés de rendre le texte aisément intelligible aux utilisateurs possibles. Cette préoccupation a sans doute entraîné quelques longueurs nécessitées par des développements où l'aspect physique et intuitif des théories a parfois pris le pas sur leur rigueur mathématique. Nous espérons, du moins, que le procédé présente quelque valeur didactique propre à le justifier.

Notre travail, qui fait intervenir une unité pilote importante et des calculateurs analogiques, numériques et hybride, n'a évidemment pu être mené à bien qu'avec la collaboration d'une véritable équipe et de nombreux appuis et encouragements scientifiques et financiers. Nous sommes profondément conscients de ce que nous devons à ces apports et on voudra bien voir dans les lignes qui vont suivre, non pas la soumission à une pratique routinière, mais l'expression sincère de notre reconnaissance et de notre gratitude.

Nos remerciements s'adressent d'abord à Monsieur R. MEZENECV, Directeur du Laboratoire d'automatique de l'ENSM, à qui revient le mérite d'avoir orienté nos recherches et conseillé notre démarche dans la voie qu'il nous avait proposée. La création de l'unité pilote dans un but de commande notamment lui est due, et il a de surcroît, soutenu de son autorité notre conception de travail d'équipe. Lors de certaines heures difficiles, c'est sa compréhension bienveillante, son intérêt constant, son appui efficace qui nous ont permis d'atteindre l'objectif que nous nous étions fixés. Nous lui en sommes profondément reconnaissant et nous espérons que ce mémoire ne décevra pas trop la confiance qu'il nous a toujours témoignée.

Monsieur J. F. LE CORRE - chef du département Génie Electrique de l'IUT de NANTES - a été notre équipier de la première heure et il nous a beaucoup appris sur le plan de la physique des choses. Il sait le souvenir que nous gardons de cette collaboration : nous nous devons pourtant de dire ici publiquement combien son aide nous a été précieuse.

Mais si ce mémoire a vu le jour, Madame A. GROLLEAU y a bien, aussi, quelque part, puisqu'en définitive c'est l'intérêt même que nous avons trouvé à son enseignement qui nous a poussé au laboratoire d'automatique de l'ENSM.

C'est trop peu de dire que les échanges que nous avons eus avec Ph. DE LARMINAT ont été enrichissants et notre souhait est très vif que cette collaboration amicale et fructueuse puisse se poursuivre longtemps encore.

Nous devons des remerciements particuliers à nos collègues R. TRIBES, J. C. MARC, B. CHENEVEAUX, D. SARLAT, M. AZEMA, A. ABDALLAH, F. PAULUS et J. DESCUSSE - qui ont participé activement à nos recherches -, et aux techniciens dévoués et compétents que sont MM. M. BARRE, S. BELLAVOIR, BERTHONNEAU et G. ROUGE, sans oublier Mesdames les dactylos, - qui qualifient parfois notre écriture d'illisible - et tout le personnel de l'imprimerie : à tous, j'exprime ma très vive gratitude.

Mais ce sont l'ENSM et l'IUT de NANTES qui ont engendré cet environnement scientifique et technique, et ce sont eux aussi qui ont mis à notre disposition les moyens de calcul nécessaires à nos travaux : qu'ils en soient très sincèrement remerciés.

Des mérites analogues reviennent à la DGRST puisque c'est elle qui a mis en place, à l'ENSM une équipe de spécialistes de la commande. C'est elle aussi qui nous a permis, grâce à l'appui financier de ses contrats, la plus fructueuse des collaborations avec la Société EAI et en particulier avec Messieurs W. CLAES et A. STEVEN.

En instituant le laboratoire d'automatique, "équipe de recherche associée", le CNRS en a provoqué l'essor et a contribué ainsi à nous placer dans un contexte de recherches très profitables. Plus encore, le CNRS a bien voulu nous honorer de sa confiance en nous nommant à un poste de chercheur qui nous a permis, au moment opportun, de nous consacrer plus complètement à la recherche.

Saurons-nous jamais exprimer suffisamment la profonde reconnaissance que nous gardons à notre parrain du CNRS, M. le Professeur R. PERRET, Directeur du Laboratoire d'automatique de GRENOBLE ? Nous n'avons jamais été déçus par les avis hautement autorisés et les conseils judicieux qu'il nous a prodigués. De surcroît, c'est lui qui, en collaboration avec M. R. MEZENECV, a organisé notre accueil scientifique aux U.S.A.

A ce propos, les énormes facilités de travail que nous a offertes le Professeur C. T. LEONDES à l'Université de Californie de LOS ANGELES nous apparaissent plus que jamais sans prix.

Notre gratitude va également au Professeur R. E. KALABA, alors à la RAND CORPORATION et actuellement Professeur à l'Université de Californie du Sud : nous ne saurions dire tout ce que nos recherches sur l' "invariant imbedding" doivent à sa science.

Cette expérience américaine, assurément, n'a été possible que grâce à l'aide financière qu'ont bien voulu nous accorder le jury des bourses de l'OTAN et la commission FULBRIGHT : puisse ce mémoire témoigner que leur concours n'a pas été inutile et leur apporter un nouveau remerciement.

Par ailleurs, dire que MM. R. CHAUSSARD - Directeur du département "Automatique des Moyens de Production" aux Etudes et Recherches EDF -, et P. GODIN - Chef de groupe au dit département - ont toujours manifesté le plus grand intérêt aux recherches du Laboratoire d'automatique de l'ENSM et, par tant, à nos travaux, n'exprimerait qu'une partie de ce que nous leur devons. Leur expérience des processus thermiques nous a été du plus grand profit et l'appui qu'ils ont accordé au projet de continuation de telles recherches

sur centrale électrique nous ouvre des perspectives dont nous mesurons toute la valeur.

Nous ne voudrions pas terminer sans dire ici à Monsieur M. Y. BERNARD, Professeur titulaire au Conservatoire National des Arts et Métiers, combien nous avons été sensibles à l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de constituer le jury de notre thèse en compagnie de Messieurs R. MEZENCEV, J. F. LE CORRE, R. PERRET, R. CHAUSSARD et P. GODIN.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555419_0031

RESUME

CONTRIBUTION A L'ETUDE ET A LA MISE EN OEUVRE D'UNE REGULATION OPTIMALE DYNAMIQUE FONCTIONNELLE

Presque tous les systèmes actuels de régulation des processus dynamiques trouvent leur fondement théorique dans l'usage des transformées en s ou en z . C'est pourquoi des difficultés notables et des limitations regrettables apparaissent quand il s'agit de traiter des systèmes multivariables, non stationnaires ou non linéaires, de faire face à des perturbations connues à priori de façon déterministe ou aléatoire, ou encore de tenir compte des contraintes inégalités ou des butées régissant le processus à réguler.

Or, l'optimisation dynamique fonctionnelle, qui doit son extraordinaire développement théorique aux besoins aérospatiaux, présente, du point de vue formel, toutes les caractéristiques qui permettront d'en envisager l'application à la régulation des systèmes dynamiques industriels.

Cette constatation nous a incités à procéder à l'étude des possibilités de la régulation optimale dynamique fonctionnelle. Pour cela, nous avons tenté d'apporter quelques contributions à la théorie que nous avons en outre adaptée aux problèmes de régulation, tout en nous efforçant de donner aux exposés théoriques un aspect physique indispensable, semble-t-il, à la diffusion de tels procédés. Des algorithmes de calcul, tant analogiques que numériques et hybrides, ont été développés et l'ensemble de l'étude a été étayé par des applications sur unité pilote.

Le chemin susceptible de conduire à la mise en oeuvre d'une commande optimale industrielle comprend visiblement des étapes qui nous ont conduit à diviser ce mémoire en trois parties, dont l'une concerne l'optimisation quadratique des systèmes linéaires ou linéarisés, dont l'autre est consacrée à la prise en compte des contraintes inégalités de fonctionnement, et dont la troisième propose des algorithmes sous optimaux "en ligne" propres à pallier les sujétions économiques et techniques qui accompagnent encore actuellement les procédés exposés dans la seconde partie.

PREMIERE PARTIE

Une critique des méthodes multivariables dans l'espace d'état amène à développer un critère quadratique d'intérêt pratique dont on montre, en monovariable, qu'il donne à la régulation des caractéristiques recherchées habituellement en régulation classique : stabilité asymptotique - structure PID²... et par tendances - insensibilité aux paramètres et aux perturbations. Le problème de la reconstruction de l'état, inhérent à ce type de commande, est ensuite considéré d'un point de vue physique qui explique les diverses structures fournies par les théories existantes sur ce sujet. L'aspect stochastique y est notamment développé et on montre, pour un fonctionnement en télé réglage d'un générateur de vapeur pilote, comment il est possible de tenir compte des erreurs de modèle.

SECONDE PARTIE

Consacrée, rappelons le, à la commande des processus régis par des contraintes inégalités ou des butées.

Deux méthodes sont abordées, aboutissant à des algorithmes de commande :

1) Les équations d' "invariant imbedding" dont on démontre la validité en présence de contraintes et qui permettent d'établir en un seul balayage un catalogue des réponses d'un système linéaire à commande contrainte et muni d'un critère quadratique.

2) Les méthodes variationnelles utilisées en présence de contraintes sur l'état, qui sont synthétisées dans un condensé théorique, donnent naissance à des algorithmes qui, employés dans une technologie hybride, permettent grâce à la rapidité de calcul d'effectuer des commandes optimales "en ligne".

Cependant, le calcul hybride étant encore à l'heure actuelle un outil de spécialiste onéreux, il s'avère expédient de développer, pour un usage à court terme, des techniques sous optimales : c'est l'objet de la troisième partie.

TROISIEME PARTIE

Dans une étude des stratégies sous optimales, on expose comment des techniques de régression, utilisant des résultats optimaux obtenus "hors ligne" par les algorithmes développés dans la seconde partie, permettent d'élaborer une commande en boucle fermée purement statique et donc aisément et économiquement mise en oeuvre.

Comme ce genre de méthodes peut néanmoins donner naissance à des structures de commande très diverses et toujours susceptibles d'amélioration, on s'est efforcé de montrer que, même la structure la plus simple, alliée à des algorithmes de reconnaissance de formes, fournit sur unité pilote des résultats suffisamment satisfaisants compte tenu des imprécisions de modèle et de mesures.

S O M M A I R E

	<u>Pages</u>
<u>INTRODUCTION -</u>	1
1 - LA REGULATION CLASSIQUE	3
1-1 Structure des boucles de réglage	3
1-2 Critères de réglage	7
1-3 Conclusion	10
2 - LA COMMANDE OPTIMALE DYNAMIQUE FONCTIONNELLE	10
2-1 Position du problème	11
2-2 Solutions du problème d'optimisation	12
2-2-1 L' "invariant imbedding"	13
2-2-2 Les méthodes variationnelles	13
2-3 Conclusion	15
3 - PLAN DU PRESENT RAPPORT	16
BIBLIOGRAPHIE -	18
1ère partie - <u>REGULATION OPTIMALE QUADRATIQUE</u>	19
Chapitre I - LA REGULATION MULTIVARIABLE DANS L'ESPACE D'ETAT -	21
1 - LE DECOUPLAGE	21
1-1 La solution de B.S. MORGAN	22
1-2 La solution de FALB-WOLOWICH	22
2 - L'INVARIANCE	24
3 - LE PLACEMENT ARBITRAIRE DES POLES	27
3-1 Le cas monocommande	27
3-2 Le cas multicommande - commande modale	
4 - CONCLUSION	29
Appendice - TRANSFORMATIONS CANONIQUES	31
BIBLIOGRAPHIE -	35
Chapitre II - OPTIMALISATION QUADRATIQUE -	37
A - THEORIE ET PRATIQUE DE L'OPTIMALISATION QUADRATIQUE	37
1 - Position du problème	37
2 - Résolution	38
3 - Problèmes posés par l'application de l'optimisation quadratique	39

B - REGULATION CLASSIQUE ET OPTIMALISATION QUADRATIQUE	42
1 - Structure du régulateur optimal	43
2 - La sensibilité des systèmes linéaires optimaux	44
C - RECONSTRUCTION DES ETATS	47
1 - Définition	47
2 - Les systèmes statiques	48
3 - Généralités pratiques sur les systèmes dynamiques	49
4 - Les observateurs de LUENBERGER	51
5 - Application de la théorie de l'estimation - Les estimateurs de KALMAN-BUCY	53
5-1 La théorie de l'estimation	53
5-1-1 Le principe d'orthogonalité	53
5-1-2 Estimation linéaire	54
5-1-3 Equation de WIENER HOPF	55
5-2 Estimateur de KALMAN-BUCY	55
5-2-1 y et w sont des bruits blancs	56
5-2-2 Bruit coloré sur la mesure	57
5-2-3 Certaines mesures sont non bruitées	58
5-2-4 Cas général	58
D - CONCLUSION	59
BIBLIOGRAPHIE -	61
Chapitre III - APPLICATION DU "PRINCIPE DE SEPARATION" A LA COMMANDE OPTIMALE D'UN GENERATEUR DE VAPEUR -	63
1 - LE "PRINCIPE DE SEPARATION"	63
2 - POSITION DU PROBLEME DE REGULATION	65
3 - RESOLUTION EN SIMULATION	67
3-1 Le problème d'optimisation	67
3-2 Le problème d'estimation	68
4 - RESOLUTION DES PROBLEMES D'APPLICATION "EN LIGNE" DUS AUX ERREURS DE MODELE	71
4-1 Etude d'un exemple	71
4-2 Application au générateur de vapeur	75
5 - RESULTATS EXPERIMENTAUX	76
6 - CONCLUSION	83
BIBLIOGRAPHIE -	84

2ème partie - DETERMINATION "HORS LIGNE" DE TRAJECTOIRES OPTIMALES CONTRAINTES

	85
Chapitre I - LES EQUATIONS D' "INVARIANT IMBEDDING" POUR UNE COMMANDE OPTIMALE CONTRAINTE -	87
1 - LE CONCEPT D' "INVARIANT IMBEDDING"	87
2 - LES EQUATIONS D'OPTIMALITE POUR UN PROBLEME AVEC COMMANDE CONTRAINTTE	89
3 - VALIDITE DES EQUATIONS D' "INVARIANT IMBEDDING"	92
3-1 Démonstration de (21) et (23) : $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \quad \underline{x}(a) = \underline{c}$	93
3-2 Démonstration de (22) et (24) : $-\dot{\underline{\lambda}} = \underline{H}_{\underline{x}} \quad \underline{\lambda}(T) = 0$	94
3-3 Démonstration de (19) : $\min_{ \underline{w} \leq M} H(\underline{x}, \underline{w}, \underline{\lambda}) = H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda})$	96
4 - CONCLUSION	97
BIBLIOGRAPHIE -	98
Chapitre II - APPLICATION DE L' "INVARIANT IMBEDDING" A L'OPTIMALISATION QUADRATIQUE (AVEC CONTRAINTE SUR LA COMMANDE) -	99
1 - UN EXEMPLE ELEMENTAIRE	100
1-1 Traitement analytique par le principe du Minimum	101
1-2 Traitement analytique par l' "Invariant Imbedding"	102
1-2-1 Supposons $ u(t, a, c) < 1 \quad \forall t \in (a, T)$	102
1-2-2 Supposons $u(a, a, c) = +1$ (le cas -1 est symétrique)	103
1-3 Recherche d'une stratégie	105
2 - UNE STRATEGIE D'OPTIMALISATION PAR CRITERE QUADRATIQUE OBTENUE PAR LES EQUATIONS D' "INVARIANT IMBEDDING" (commande bornée)	107
2-1 $u(t, a, c)$ n'atteint pas la butée $\forall t \in [a, T]$	107
2-2 $u(a, a, c) = +1$ (le cas -1 est symétrique)	108
2-2-1 $a \leq a_p \leq t < T$	108
2-2-2 $a \leq t \leq t_p < T$	109
3 - RESULTATS NUMERIQUES	110
4 - CONCLUSION	111
BIBLIOGRAPHIE -	112
Chapitre III - THEORIES VARIATIONNELLES : PROBLEMES A COMMANDE ET ETAT CONSTRAINTS -	113
1 - CALCUL DES VARIATIONS ET PRINCIPE DU MINIMUM	114
1-1 Calcul différentiel et calcul des variations	114
1-2 Extremums faible et fort - Principe du Minimum	116
1-3 Conclusion	118

2 - APPLICATION DES METHODES VARIATIONNELLES AUX PROBLEMES A ETAT CONTRANT	119
2-1 Conditions d'optimalité pour les "problèmes de butées"	120
2-2 Conditions d'optimalité pour les "problèmes de contraintes"	121
2-3 Conclusion	121
3 - APPLICATION A LA REGULATION PAR CRITERE QUADRATIQUE	125
4 - CONCLUSION	129
BIBLIOGRAPHIE -	130
Chapitre IV - RESOLUTION DES CONDITIONS D'OPTIMALITE ISSUES DES METHODES VARIATIONNELLES -	131
1 - RAPPEL DE LA FORMULATION D'UN PROBLEME A VALEURS LIMITEES EN PLUSIEURS POINTS	132
2 - LES METHODES DE NEWTON ET DU GRADIENT	134
2-1 La méthode de NEWTON	134
2-2 La méthode du gradient	134
3 - APPLICATION DES METHODES DE NEWTON ET DU GRADIENT A LA RESOLUTION DES PROBLEMES A VALEURS LIMITEES EN DEUX POINTS	136
3-1 Itération sur des variables	136
3-1-1 Application de la méthode de NEWTON - matrice de sensibilité	137
3-1-2 Application de la méthode du gradient	137
3-1-3 Remarque sur la méthode d'itération sur les variables	138
3-2 Itération sur des fonctions (trajectoires)	138
3-2-1 Application de la méthode de NEWTON - quasi linéari- sation	138
3-2-2 Application de la méthode du gradient - gradient fonctionnel	139
3-3 Conclusion	140
4 - REGULATION OPTIMALE AVEC COMMANDE ET ETAT CONTRAINTS	
4-1 Méthode de sensibilité	141
4-2 Méthode des dérivées partielles	144
4-2-1 Principe de la "méthode des dérivées partielles"	145
4-2-2 Solution hybride	147
4-2-3 Application au générateur de vapeur (simulation)	147
5 - CONCLUSION	148
BIBLIOGRAPHIE -	152

3ème partie - <u>REGULATIONS DYNAMIQUES FONCTIONNELLES</u> <u>SOUS-OPTIMALES</u>	153
Chapitre I - CONSIDERATIONS SUR LA SOUS-OPTIMALITE -	155
1 - SOUS-OPTIMALITE	156
1-1 Définition	156
1-2 Exemple	156
1-3 Classification des méthodes sous-optimales	157
2 - UTILISATION D'UNE TRAJECTOIRE NOMINALE - PROBLEME DU GUIDAGE	158
3 - APPROXIMATION DE LA COMMANDE OPTIMALE PAR DES FONCTIONS	160
3-1 Choix de l'échantillon	161
3-2 Choix de la structure de $\underline{u}_A(p, k)$	162
4 - CONCLUSION	164
BIBLIOGRAPHIE	165
Chapitre II - UNE REGULATION SOUS-OPTIMALE PAR ALGORITHME D'APPRENTISSAGE	167
1 - RECONNAISSANCE DE FORME ET SYSTEMES A APPRENTISSAGE	168
1-1 Description de l'élément linéaire à seuil	170
1-2 Codage des variables d'entrée	170
1-3 Application à la commande sous-optimale	170
2 - MISE EN OEUVRE DU GENERATEUR DE FONCTION ADAPTATIF	174
2-1 Choix des échantillons	174
2-2 Traitement des échantillons - algorithmes d'apprentissage	175
3 - CONCLUSION	176
4 - REGULATION SOUS-OPTIMALE	178
4-1 Commande sous-optimale d'un problème de butée	178
4-2 Commande "en ligne" du générateur de vapeur	183
5 - CONCLUSION	184
BIBLIOGRAPHIE -	185
<u>CONCLUSION GENERALE -</u>	187
Annexe - LE GENERATEUR DE VAPEUR DU LABORATOIRE D'AUTO- MATIQUE DE L'E.N.S.M.	A.1
1 - LES CENTRALES ELECTRIQUES	A.1
1-1 Considérations générales	A.1
1-2 Description d'une chaudière de centrale	A.4
1-3 Régulation	A.7

1-4 Conclusion	A.10
2 - L'UNITÉ PILOTE	A.11
2-1 Description	A.11
2-2 Modèle mathématique de la chaîne de surchauffe	A.12
2-2-1 Généralités	A.12
2-2-2 Modèle théorique	A.14
2-2-3 Identification expérimentale	A.16
3 - CONCLUSION	A.17
BIBLIOGRAPHIE -	A.20

- (15) = numéro d'équation
- 7- = report bibliographique en fin de chapitre
- $\underline{x}$ = vecteur x (sauf indication explicite contraire, c'est un vecteur colonne)
- $\underline{f_x}$ = le vecteur colonne de composantes $\frac{\partial f}{\partial x_i}$
- F_{xx} = la matrice $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$
- F_x = la matrice $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ $i = \text{indice de ligne}$
 $j = \text{indice de colonne}$
- $\dot{y}$ = $\frac{dy}{dt}$
- y_t = $\frac{\partial y}{\partial t}$
- A^T = transposée de A .

CONTRIBUTION A L'ETUDE ET A LA MISE EN OEUVRE
D'UNE REGULATION OPTIMALE DYNAMIQUE FONCTIONNELLE

APPLICATIONS A UN GENERATEUR DE VAPEUR A CIRCULATION NATURELLE

INTRODUCTION

Afin de préciser d'emblée le cadre de cette étude, il convient d'indiquer que les termes "régulation optimale fonctionnelle" concernent les systèmes dynamiques continus décrits par des équations différentielles ordinaires et commandés sur la base de la minimalisation d'une fonctionnelle appelée critère de performance.

Formellement, l'étude portera donc sur les processus :

- représentés dans une structure, dite d'état par : (problème I)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (I,1)$$

$\underline{x}$ = vecteur d'état de dimension n généralement non mesurable

$\underline{u}$ = vecteur de commande de dimension m

$$\underline{y} = \underline{h}(\underline{x}, t) \quad (I,2)$$

$\underline{y}$ = vecteur de mesure ou de sortie de dimension p , $p \leq n$

- et pilotés par la fonction $u^*(t)$ admissible⁺ ($t \in [t_0, t_0 + T]$)

⁺ Le terme "admissible" signifie que $u^*(t)$ appartient au domaine fermé Ω qui peut être, soit imposé naturellement, soit assigné par l'utilisateur. Des restrictions régissent aussi quelquefois les variations de $\underline{x}$ (on parle alors de contraintes sur l'état) : il en sera fait état en détails au chapitre III 2ème partie.

qui minimise le critère de performance

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_0 + T} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad (I,3)$$

et satisfait aux liaisons : $\phi_0(x(t_0), t_0) = 0$

(I,4)

$$\text{et } \phi_T(x(t_0 + T), t_0 + T) = 0$$

De nombreux systèmes physiques peuvent être décrits avec plus ou moins de précision par des équations telles que (I,1) et (I,2), que leurs paramètres soient naturellement concentrés (systèmes électriques et mécaniques à composants R.L.C.) ou qu'étant naturellement à paramètres distribués (échangeurs de chaleur, lignes de transmission de fluide...) ils aient pu être approchés à la précision imposée, par des systèmes à paramètres concentrés de dimension relativement peu élevée (disons pour l'instant < 10).

Autrement dit, les équations (I,1) et (I,2) constituent une description macroscopique du processus et sont considérées comme valables si elles représentent les phénomènes prépondérants, compte-tenu de la bande de fréquence des perturbations principales.

L'obtention des équations (I,1) et (I,2) forme la solution du problème d'identification qui se présente, bien entendu, comme un préalable à celle du problème "de commande optimale", c'est-à-dire de la minimalisation du critère (I,3).

Si certaines méthodes d'identification "sophistiquées" telles que la "méthode du modèle" ou les méthodes issues de la théorie de l'estimation ont aujourd'hui attiré l'attention et forcé l'intérêt de l'industrie, l'optimisation dynamique fonctionnelle n'en est pas encore à ce stade, sauf en un seul domaine, celui de l'aérospatial, avec lequel certains ont même parfois tendance à l'identifier, tant son développement y a été considérable.

Il est en effet symptomatique de constater que dans une publication générale et synthétique d'Athans en 1966 -1-, on trouve 67 références concernant les applications aérospatiales de l'optimisation et 13, regroupées sous une rubrique "autres applications", qui concernent aussi bien un servomécanisme électrohydraulique, les problèmes de dispatching des centrales hydroélectriques qu'un réacteur chimique ou des moteurs pas à pas. Dans le même ordre d'idée, le premier ouvrage faisant état d'applications, qui a été publié par Leitman dès 1962 s'intitule "optimization techniques with applications to aerospace systems" -2-

Sans doute convient-il d'observer que la précision des équations de fonctionnement des processus aérospatiaux alliée à des performances exigées de façon claire et précise (tels par exemple les changements d'orbite, les rendez-vous, l'alunissage avec consommation minimale de carburant) a permis l'utilisation aisée des théories de l'optimisation dynamique. Comme, de surcroît, la résolution de ces problèmes était en quelque sorte "vitale" et ne pouvait donc en la conjoncture être freinée par des contraintes économiques importantes, on a pu assister à un développement fulgurant des techniques optimales.

Ces éléments favorables sont, bien sûr, rarement réunis dans l'industrie classique, et il est compréhensible que, malgré son attrait intellectuel, l'optimisation dynamique fonctionnelle n'ait pas à ce jour pénétré profondément les mœurs industrielles, et ce, d'autant moins que les systèmes de régulation habituels donnent souvent satisfaction à des utilisateurs bien rodés à leur technologie et qu'une reconversion tourmente toujours quelque peu.

D'aucuns pourtant s'accordent à constater les limites théoriques, mais aussi pratiques, de la régulation classique et ils sont conscients, d'autre part, que là comme ailleurs, il faudra bien s'adapter à l'ère des calculateurs et leur assigner des tâches beaucoup plus nobles que celles des régulateurs actuels.

Il n'est donc pas sans intérêt dans ce propos introductif de procéder :

- d'une part à un survol des méthodes de régulations classiques, c'est-à-dire des systèmes actuels de régulation pour en dégager les insuffisances et montrer combien celles-ci incitent à utiliser des moyens théoriques plus puissants, tels que l'optimisation.

- d'autre part à une présentation des méthodes d'optimisation dynamique fonctionnelle à l'étude desquelles la suite du mémoire tentera d'apporter une contribution afin qu'elles soient effectivement des procédés de régulation et que les moyens pour les mettre en oeuvre deviennent acceptables, permettant ainsi que s'affirment les étapes possibles vers une régulation optimale industrielle.

1 - LA REGULATION CLASSIQUE :

1-1 Structure des boucles de réglage :

La version élémentaire d'un système de réglage est constituée d'une boucle fermée, qui, dans sa version la plus simple comporte un élément analogique dynamique : le P.I.D. (régulateur à trois actions : proportionnelle,

intégrale et dérivée), et de chaînes dites "ouvertes" (ou tendances) où l'on trouve généralement un régulateur introduisant des informations mesurables (des perturbations) dans l'organe réglant.

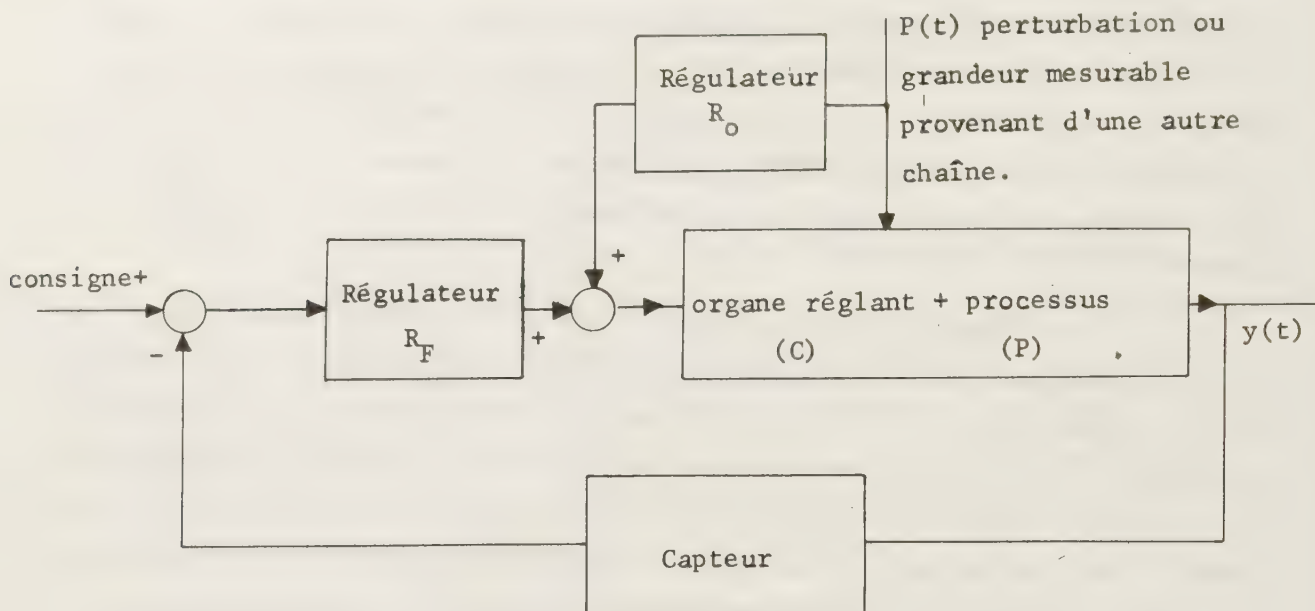


Fig. 1

Parmi les améliorations possibles de cette structure, il convient d'en indiquer deux qui procèdent du même principe que les bouclages sur les variables d'état :

- les "régulations cascade" où une variable intermédiaire mesurable sur le processus est elle-même réglée par un régulateur dont la consigne est donnée par la sortie du "maître régulateur" (R_F)

- les "régulations par modèles" notamment développées par les Belges dans le cadre du projet C.H.A.N.C.E. -3- -4- qui s'appliquent lorsque la grandeur $p(t)$ n'est pas mesurable et dont il peut être opportun de rappeler ici le principe : on suppose que l'effet de $p(t)$ sur $y(t)$ se traduit par l'addition d'une grandeur q en aval de y .

En l'absence de q (fig. 2), la sortie suit parfaitement la consigne si P_0 représente une bonne approximation de P . En présence de q , la consigne doit être corrigée par un terme Δy (fig. 3) qui constitue l'effet de q (donc de $p(t)$ - fig. 1) sur la sortie.

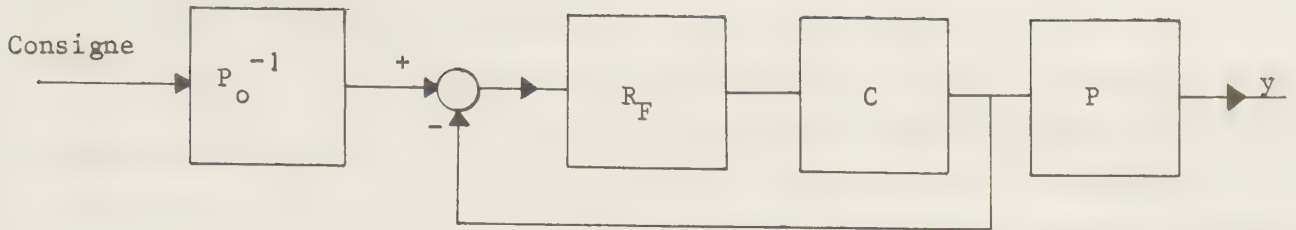


Fig. 2

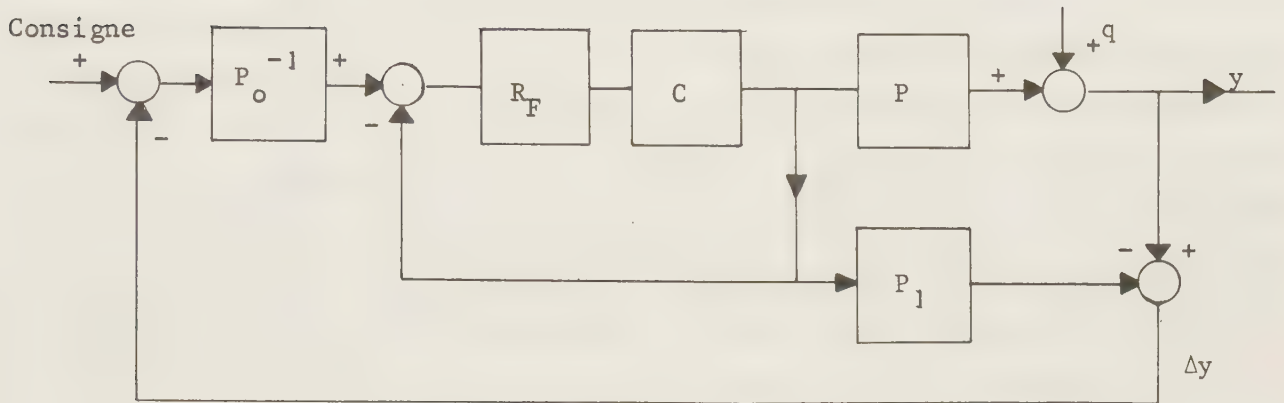


Fig. 3

Si $P_o \equiv P_1 \equiv P$, on peut vérifier que :

$$\frac{\Delta y(s)}{\Delta q(s)} = 1 - \frac{R_F(s) C(s)}{1 + R_F C}$$

ce qui signifie non seulement que les perturbations peuvent être annihilées, mais aussi que la détermination des actions de réglage de R_F ne dépend que de l'organe de commande C et non du processus P .

Le schéma de principe de la figure (3) peut être converti en un schéma industriel figure (4).

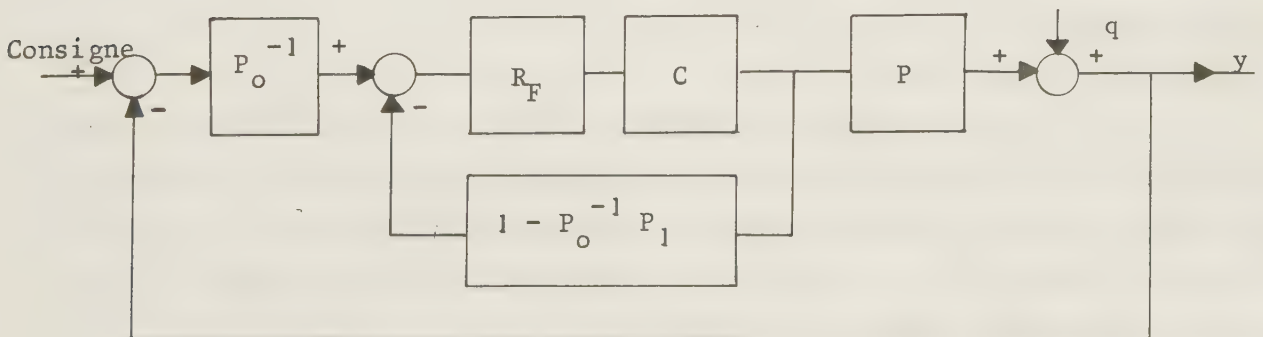


Fig. 4

La réalisation de ce type de régulation a été possible grâce au développement des régulateurs électroniques qui permettent une meilleure précision d'affichage, une bonne linéarité des actions de réglage et une bonne "reproductibilité" de leurs réponses dynamiques. De plus leur conception modulaire facilite la mise en oeuvre des véritables calculateurs analogiques que nécessitent les régulations par modèle.

On notera cependant que même les structures de réglage les plus élaborées ne concernent que les systèmes monoentrée et monosortie et reposent sur les descriptions fréquentielles des processus (fonctions de transfert). En effet, si des efforts ont été faits quant au découplage et au réglage non interactif des systèmes multivariables décrits par des transmittances, on ne peut pas dire que des méthodes aisément applicables en soient résultées. Il n'est que de constater comment face à un processus à deux entrées, la plupart des entreprises spécialistes de régulation s'intéressent d'abord à la grandeur de commande prépondérante, puis prévoient l'intervention de la seconde commande lorsque la première n'est plus suffisante. De même, les tendances sont introduites "coup par coup" à mesure que la connaissance du processus s'accroît. Mais même en présence d'un modèle complet et précis du processus, l'ingénieur automatique ne peut pas utiliser cette connaissance globalement s'il emploie les méthodes classiques, dont l'application est surtout adaptée à l'usage du papier et du crayon.

Sans doute certains processus sont-ils maintenant équipés d'un ordinateur et dans ce cas, un grand pas a été fait vers l'emploi d'autres méthodes. Malheureusement, le rôle du calculateur est généralement de surveiller l'installation. Lorsqu'il pilote effectivement le système physique (on parle alors de commande en ligne), ou bien il ne fait que transfigurer, sous forme digitale, le régulateur P.I.D., auquel cas il est doublé par une régulation analogique classique, ou bien il détermine les points de consigne et joue ainsi un rôle de coordinateur des régulations classiques. Il convient de rappeler que la présente étude fait abstraction des régulations optimales statiques et des commandes séquentielles (tels les démarrages d'installation) auxquelles l'ordinateur a beaucoup apporté.

Pour compléter ce paragraphe relatif à la régulation classique, nous indiquons les quelques critères de réglage industriellement employés et qui, s'ils recèlent des insuffisances, n'en possèdent pas moins des caractéristiques de simplicité qu'il est bon de prendre en considération pour le développement de nouvelles méthodes de régulation.

1-2 Critères de réglage

Il y a d'abord les critères de marge de gain et de marge de phase bien connus des servomécaniciens, mais d'un emploi direct peu aisé par un non spécialiste de la méthode.

Le plus souvent, on trouve dans l'entreprise chargée de la régulation, le technicien expérimenté qui rapidement, dans la majorité des cas, obtient par touches successives le "bon réglage".

Parmi les critères scientifiques, les plus universellement utilisés sont ceux de Ziegler et Nichols, qui fournissent par trois formules élémentaires les actions proportionnelle, intégrale et dérivée à afficher.

Un premier critère repose sur la réponse indicielle du système en boucle ouverte, que l'on assimile à un intégrateur couplé à un retard pur. Notons que la simplicité de la représentation se justifie pleinement (pour les processus à minimum de phase), puisque c'est une bonne réponse transitoire que l'on souhaite obtenir.

Ainsi pour un processus de réponse indicielle, assimilable, pour t faible, à un retard pur L et à un intégrateur de pente R , le régulateur de transmittance $K_c (1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$

est donné par $K_c = \frac{1,2}{RL}$, $T_i = 2 L$, $T_d = 0,5 L$

Ziegler et Nichols fournissent également les actions pour un proportionnel seul ($K_c = \frac{1}{RL}$) et pour un proportionnel intégral ($K_c = \frac{0,9}{RL}$, $T_i = 3,3 L$)

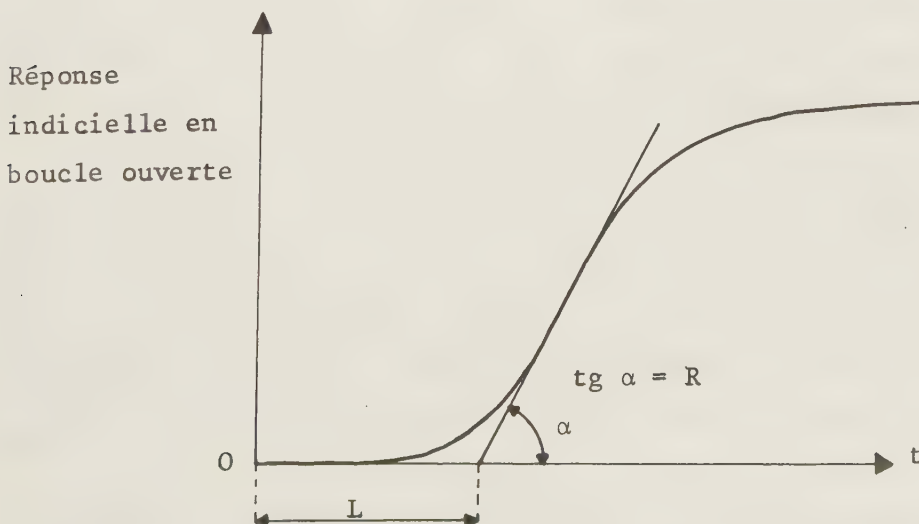


Fig. 5

Ces valeurs ont été obtenues expérimentalement par optimisation paramétrique effectuée sur de multiples processus (critère $J = \int_0^\infty |e|/dt$) mais on peut vérifier de surcroît qu'un système en boucle fermée, dont la transmittance en boucle ouverte est $\frac{K_c}{s} Re^{-sL}$, possède une réponse oscillante dont le rapport ("optimal") entre les deux premiers dépassements vaut 0,25, pour $K_c RL \neq 1$ (cf valeur K_c donnée par les auteurs pour un régulateur proportionnel).

Ce critère suppose que l'on soit en mesure de relever la réponse indicielle du processus en boucle ouverte : la seconde méthode de Ziegler et Nichols concerne le système en boucle fermée commandé par un proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à ce que des oscillations (de période T_0) apparaissent (soit K_0 ce gain). De même que ci-dessus Ziegler et Nichols obtinrent les affichages suivants :

$$K_c = 0,5 K_0 \text{ pour un proportionnel seul}$$

$$K_c = 0,45 K_0 \quad T_i = 0,83 T_0 \text{ pour un P.I.}$$

$$K_c = 0,5 K_0 \quad T_i = 0,5 T_0 \quad T_d = 0,125 T_0 \text{ pour un P.I.D.}$$

Certes la valeur minimale du critère $J = \int_0^\infty |e|/dt$ ne sera qu'approchée en raison du caractère de simplicité et de l'universalité des formules utilisées. Mais le plus souvent, le critère J , où l'allure des réponses transitoires du système bouclé, sont assez peu sensibles aux paramètres de réglage. C'est là une des caractéristiques à retenir de cette méthode : une détermination grossière des actions est suffisante étant données les non linéarités, les non stationnarités du processus et l'imprécision même des affichages sur les régulateurs bon marché.

Si cependant une régulation plus précise, plus fidèle⁺, s'avère nécessaire, on aura recours à une identification plus complète (donc plus onéreuse) du processus. Dans cet ordre d'idée, il n'est peut-être pas inutile de rappeler les travaux relatifs au critère de Naslin effectués par EDF -5-.

Les paramètres de régulation sont déterminés de telle sorte que le dénominateur de la transmittance du système régulé (c'est-à-dire en boucle fermée) soit en polynôme "normal" en s , représenté en module dans le plan de Bode sur la figure (6). (Cette méthode est assimilable aux régulations par modèle, puisqu'en quelque sorte on impose les dynamiques du système en boucle fermée).

⁺Fidèle est pris ici dans le sens de la fidélité d'un appareil de mesure, la régulation donnant des performances identiques pour un même affichage des actions de régulateur.

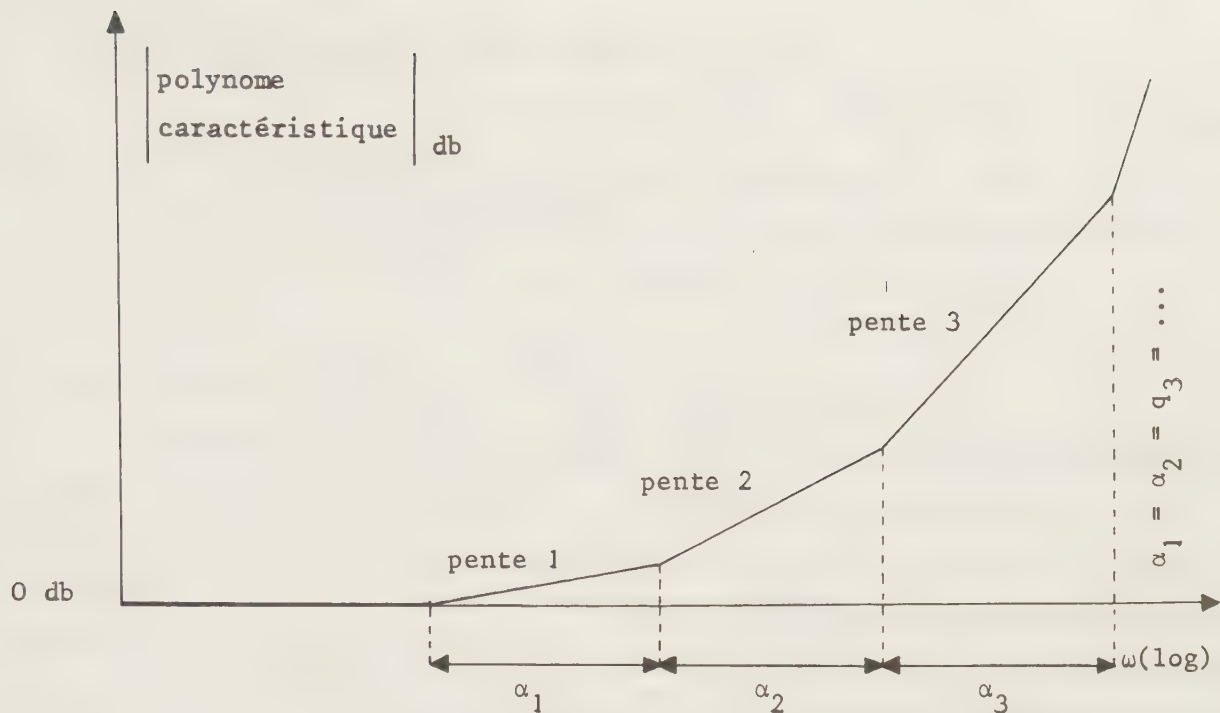


Fig. 6

Naslin - 9- a constaté que l'amortissement du système est lié à la valeur de α et qu'ainsi, en s'imposant α , on obtient, quelque soit l'ordre du système, un dépassement D constant sur la réponse indicielle ($\text{Log } D\% = 4,8 - 2\alpha$)⁺. De même le temps de montée ne dépend que de ω_0 (cf fig.) ($t_m = 2,2/\omega_0$)⁺.

Connaissant donc la transmittance du processus en chaîne ouverte, on calcule, pour une structure donnée du régulateur, les actions de ce régulateur afin que la transmittance en boucle fermée ait un polynome caractéristique conforme à celui de la figure et dont les paramètres α et ω_0 correspondent au dépassement et au temps de montée imposés à priori.

Le service des Etudes et Recherche d'E.D.F. a d'abord procédé à l'identification des processus par la méthode de Strejc (à la suite d'un essai indiciel, on déduit la fonction de transfert du processus $KG = \frac{Ke^{-s\tau}}{(1 + sT)^{n'}}$) d'ailleurs modifiée afin de supprimer le retard pur τ , ce qui donne $KG = \frac{K}{(1 + sT)^{n'}}$, avec n' fractionnaire. On peut alors, à l'aide d'un "catalogue" - 6-, choisir, pour un n' trouvé, la réponse indicielle globale souhaitée, ce qui fournit la structure du régulateur ainsi que ses actions déterminées par abaque.

*Pour des systèmes apériodiques.

Remarquons enfin que la méthode est également utilisable pour la détermination du régulateur (R_0) de tendance (fig. 1).

Il y a dans cette méthode et dans le "manuel d'utilisation E.D.F." un progrès important par rapport aux classiques Ziegler et Nichols :

- d'une part, un choix est possible entre différents types de régulateur (P - PI - PID)
- d'autre part, un pas a été effectué vers une méthode synthétique puisque Naslin lui-même a démontré la "quasi optimalité" de ses polynômes.

Cependant, si des efforts ont été accomplis -7- pour étendre ces notions aux systèmes multivariables, il ne semble pas qu'ils aient été très probants. De plus, cette méthode est encore du type paramétrique, c'est-à-dire, qu'elle ne fournit pas naturellement la structure des bouclages, mais seulement les paramètres de réglage une fois cette structure imposée.

1-3 Conclusion

En définitive la principale faiblesse des processus régulés, même de ceux à qui l'on ne demande pas de grandes performances, réside dans le non-emploi d'une méthode globale synthétique pour les mettre en oeuvre. Une théorie multivariable est nécessaire même si, selon les cas, son application doit se borner à fournir quelques informations sur la structure des bouclages.

De plus, l'introduction ou l'existence dans le processus de non stationnarités, de non linéarités, de termes aléatoires rend les méthodes utilisant les transformées bien complexes et sans beaucoup d'intérêt pratique. Il est notamment une non linéarité très importante propre à tous les organes réglants : les butées qu'il serait, dans certains cas, grandement souhaitable de prendre en compte.

Enfin, à moins de solution astucieuse propre à chaque système, il n'est pas possible d'élaborer de régulation prédictive qui tiendrait compte d'une consigne programmée ou bien d'une perturbation connue en partie à l'avance.

C'est précisément ce que permet l'optimisation dynamique dont on tentera de cerner dans les pages suivantes les principaux aspects.

2 - LA COMMANDE OPTIMALE DYNAMIQUE FONCTIONNELLE :

Formulons d'abord à nouveau le problème.

2-1 Position du problème : (problème A)

Pour un processus :

- régi par des équations d'état de la forme

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) & \dim \underline{x} &= n \\ & & \dim \underline{u} &= m\end{aligned}$$

- observé par $\underline{y} = \underline{h}(\underline{x}, \underline{u}, t)$

$$\dim \underline{y} = p \text{ avec } p \leq n$$

- dont le vecteur de commande est borné ($\underline{u} \in U$) (le problème est dit avec contrainte sur la commande)

- et dont l'état est tenu de respecter $\underline{g}(\underline{x}, t) \leq 0$

$$\dim \underline{g} = q \text{ (le problème est dit avec}$$

contrainte sur l'état),

On désire obtenir le vecteur de commande $\underline{u}^*(t) \left\{ t \in [t_0, t_0 + T] \right\}$ qui minimise :

$$J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_0 + T} f_0(\underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau), \tau) d\tau$$

$$\text{et satisfait aux liaisons } \underline{\phi}_0(\underline{x}(t_0), t_0) = \underline{0}$$

$$\text{et } \underline{\phi}_T(\underline{x}(t_0 + T), t_0 + T) = \underline{0}$$

REMARQUES :

1) Pour l'instant, la solution $\underline{u}^*$ est supposée n'être fonction que du temps. La commande serait alors effectuée en boucle ouverte : nous verrons dans le paragraphe suivant qu'une solution du "type boucle fermée" est fournie par les méthodes d' "invariant imbedding"⁺. (cf § 2-2-1)

2) L'instant t_0 peut être indifféremment un temps fixé ou le temps courant. Dans le premier cas (type 1) l'optimum est dit à "horizon fixé" et dans le deuxième cas (type 2) à "horizon fuyant". Un processus de fonctionnement programmé (telle la température d'un four) sera du type 1 tandis qu'une régulation (consigne constante) sera généralement du type 2.

On voit que pour un horizon fuyant, un nouveau critère est en quelque sorte reconsidéré à chaque instant en fonction de nouvelles informations découvertes par cet horizon fuyant. Ceci implique que $\underline{u}^*(\sigma)$ (pour $\sigma \in [t, t + T]$) ne donne pas réellement l'optimum de $J(\underline{u})$.

⁺ Nous avons cru bon de conserver ici ce terme barbare qui présente l'avantage d'être plus connu des automaticiens qu'une éventuelle traduction - d'ailleurs guère plus explicite - telle que "immersion invariante".

Le critère J n'est ici qu'un moyen synthétique caractérisant les performances du processus régulé, mais sa valeur elle-même n'a pas une signification très précise. Ceci constitue l'un des aspects d'un point de vue plus général où la minimalisation d'une fonctionnelle est considérée comme un moyen de régulation plutôt que comme un but en lui-même. Autrement dit la régulation optimale est, pour nous, un moyen d'obtenir les performances qualitatives souhaitées par l'utilisateur. Nous ne sommes pas encore au stade où il serait possible de chiffrer objectivement les coûts dus aux écarts de régulation et à l'usure parfaitement prévisible du matériel et où donc, on devrait chercher précisément l'optimum d'un critère exprimé en valeur monétaire (le coût de la recherche de l'optimum étant lui-même chiffré).

3) Les liaisons ϕ_0 et ϕ_t représentent les hypersurfaces de départ et d'arrivée des trajectoires $\underline{x}^*(t)$. Quelquefois ϕ_0 et ϕ_t se résument à $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ et $\underline{x}(t_0 + T) = \underline{x}_T$, c'est-à-dire que les points de départ et d'arrivée des trajectoires $\underline{x}^*(t)$ sont fixés.

Plus généralement, il arrive qu'aucune contrainte ne soit imposée en $t_0 + T$; ϕ_T sera alors l'hyperplan infini : c'est généralement le cas d'une régulation où les écarts à atteindre doivent être faibles en présence de perturbations, mais non impérativement fixés.

2-2 Solutions du problème d'optimalisation

Il est possible de n'utiliser qu'un minimum de théorie pour résoudre le problème A en le paramétrant d'une façon ou d'une autre. En effet, la solution $u^*(t)$ peut être considérée comme variant par exemple en escalier (ce qui revient à discrétiser le problème) ou assimilée à un polynôme dont on cherche les coefficients. Ce type de solution requiert l'usage d'algorithmes de programmation non linéaire. A moins cependant de considérer une dimension très importante pour le "vecteur paramètre" à déterminer (remarquons qu lorsque cette dimension tend vers l'infini, on retrouve le problème original), il sera difficile d'obtenir le bouclage solution (de type analogique). Plus généralement, la structure de commande ne fait pas partie de la solution.

Ces considérations ne visent nullement à inférer que la régulation par programmation non linéaire est inefficace, (c'est au contraire une méthode très positive) mais plutôt, à constater qu'elle fournit une solution approchée (de dimension finie) d'un problème naturellement continu (de dimension infinie).

Parmi les méthodes de résolution exacte, on distingue deux types de solutions :

- les méthodes d'invariant imbedding utilisant le principe d'optimalité,
- les méthodes variationnelles.

2-2-1 L' "invariant imbedding" :

Le principe de l' "invariant imbedding" est le suivant : considérons, par exemple, le problème A dans le cas où ϕ_0 est telle que $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$, et $\phi_T =$ l'hyperplan infini. Ce problème peut être placé dans une famille de problèmes dont on connaît d'une part les liens (L) entre tous les membres et d'autre part, la solution d'un problème particulier P. Il sera ainsi possible d'obtenir la solution de notre problème A, à partir de celle du problème P et des liens L permettant de passer progressivement de P à A.

Dans le cas présent, la famille concerne les problèmes A optimaux, démarrant dans des états $\underline{x}_0$ différents et de périodes d'optimisation T variables. Le problème particulier P concerne le cas $T = 0$ avec $\underline{x}_0$ quelconque, dont le critère optimal est évidemment nul.

Le lien entre les différents problèmes A optimaux utilise le principe d'optimalité qui postule que toute portion d'une trajectoire optimale est elle-même optimale.

De cette manière, on obtient non seulement les équations bien connues de la programmation dynamique mais aussi celles d'invariant imbedding relatives aux trajectoires optimales d'état et de commande et qui constituent un complément indispensable de la programmation dynamique. Ces équations seront largement développées dans ce rapport ; elles se présentent, dans le cas général, sous forme de problèmes de Cauchy aux dérivées partielles et leur solution constitue les trajectoires optimales de l'ensemble des problèmes A. Malheureusement, résoudre sur calculateur des systèmes aux dérivées partielles non linéaires n'est pas trivial, et les limites de ce type de méthode résident dans ce que les utilisateurs appellent le "fléau de la dimension" qui recouvre une consommation prohibitive de mémoires. Nous verrons, cependant, que s'il est, à l'heure actuelle, difficile d'envisager une commande en ligne sur ces principes, il est en revanche relativement aisé et extrêmement fructueux de considérer les équations des programmations dynamiques et d'invariant imbedding comme un moyen de visualiser les trajectoires optimales en fonction de la période d'optimisation, de l'état de départ, de l'amplitude des contraintes...

2-2-2 Les méthodes variationnelles :

Si les méthodes précédentes ont un caractère global et

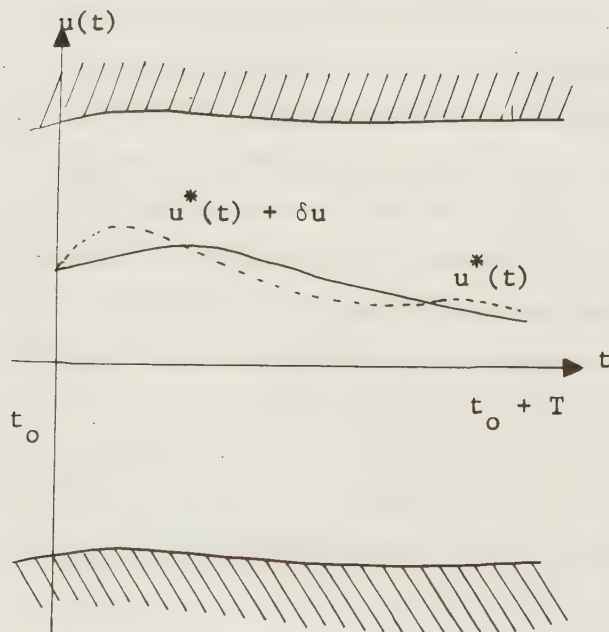
synthétique qui d'ailleurs justifie leur résolution importante et longue, les méthodes variationnelles, à l'inverse, recherchent les propriétés particulières de la solution optimale.

Le principe du calcul des variations peut être avantageusement exposé par analogie avec le calcul différentiel :

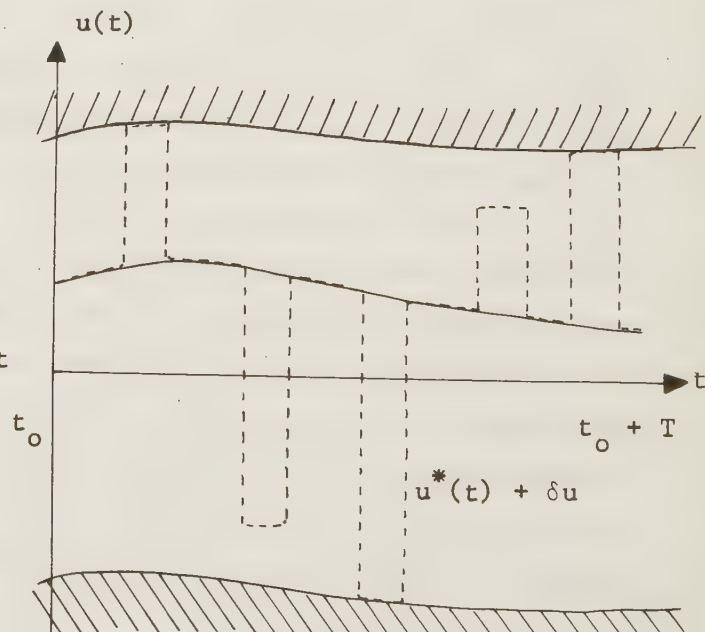
Si, en effet, la fonction $f(x)$ possède un minimum en x^* , on aura nécessairement $f(x^* + dx) - f(x^*) = f'(x^*) dx + O(dx^2) \geq 0 \quad \forall dx$. Pour dx assez faible df a le signe de $f'(x^*)$. Raisonnons par l'absurde et supposons $f'(x^*) \neq 0$, alors respectivement pour $dx = +\alpha$ et $dx = -\alpha$ on aurait des df de signes opposés ce qui est impossible puisque $df \geq 0$ (car $f(x^*)$ min.). Ceci implique que $f'(x^*) = 0$ (par là même $df(x^*) = 0$) (condition nécessaire d'optimalité).

Dans le problème A, l'optimum n'est plus une variable mais une fonction $u^*(t)$ (et $x^*(t)$). On s'intéresse donc, non plus à un accroissement de la variable (dx) mais à une variation de la fonction $\delta u(t)$ (et $\delta x(t)$). De même, au lieu d'écrire l'accroissement de la fonction $f(x)$, on calculera la variation de la fonctionnelle J (δJ) due à $\delta u(t)$ et $\delta x(t)$: cette variation devant être $\geq 0 \quad \forall \delta u(t)$ et $\delta x(t)$. On obtient ainsi l'homologue de $f' = 0$: les équations différentielles d'Euler ou leur forme canonique de Hamilton-Pontryagin.

Dans le calcul des variations pur, les variations sont d'amplitude infiniment petite sur toute la période d'optimalisation (voir fig.7)



Trajectoire variée du calcul des variations.



Trajectoire variée du Principe du Maximum.

Fig. 7

tandis que, dans la théorie de Weierstrass-Pontryagin, les variations sont de type impulsionnel (mais contenues dans le domaine admissible) : chacune des variations est de durée infiniment petite.

L'apport de cette seconde théorie par rapport au calcul des variations réside dans sa validité en présence de contraintes sur la commande.

Dans les deux cas, les conditions nécessaires obtenues se présentent sous forme de systèmes différentiels ordinaires dont les conditions limites sont imposées en $t_0, t_0 + T$ (et même en plusieurs valeurs de t lorsque, par exemple, l'état est contraint).

Du point de vue du calcul, au lieu d'avoir à résoudre, comme dans l'invariant imbedding, une fois un système de Cauchy aux dérivées partielles, on doit intégrer de nombreuses fois un système différentiel ordinaire. Il est d'ailleurs classique de montrer, dans le cas sans contraintes, que les équations canoniques de Hamilton-Pontryagin sont les caractéristiques des équations de la programmation dynamique.

Les méthodes variationnelles sont les plus aptes à la commande en ligne bien qu'elles ne donnent que des conditions nécessaires (sauf si les équations d'état sont linéaires) c'est-à-dire les candidats à l'optimum, parmi lesquels il est cependant, dans les cas pratiques, aisé de sélectionner.

Il faut citer un autre inconvénient majeur : la solution u^* est une fonction du temps et non de x ou de y , c'est-à-dire du type boucle ouverte.

Cependant pour un critère quadratique, des équations d'état linéaires et en l'absence de toute contrainte, on peut obtenir, d'ailleurs par les deux méthodes (invariant imbedding et calcul des variations), une commande optimale en boucle fermée.

2-3 Conclusion

La commande optimale fonctionnelle apparaît, du point de vue théorique, devoir répondre à de nombreux impératifs de la régulation. Outre son aspect multivariable, elle permet de prendre en compte les contraintes - notamment les butées sur les organes réglants - et elle concerne aussi bien les systèmes non linéaires que non stationnaires. De plus, bien que ce point n'ait pas encore été abordé, toute description déterministe ou aléatoire des perturbations peut, quelquefois moyennant simplification, être utilisée, fournissant ainsi une régulation prédictive. La mise en oeuvre d'une telle régu-

lation pourra être effectuée, soit à partir de la solution analytique (cas des critères quadratiques), soit en résolvant les problèmes à valeurs limites en plusieurs points issus du calcul des variations. Enfin, l'invariant imbedding permet de calculer hors ligne un faisceau de trajectoires optimales et ainsi de visualiser la sensibilité de ces trajectoires aux paramètres du problème d'optimisation.

Les limites de la régulation classique s'étant d'une part révélées et les qualités d'une régulation optimale ayant été d'autre part ressenties, il nous reste à préciser les étapes qui permettront de passer de l'une à l'autre et les différentes contributions que nous pensons pouvoir apporter à ce passage, indiquant par là même, le plan de ce rapport.

3 - PLAN DU PRESENT RAPPORT -

La première partie concerne la régulation des systèmes linéaires stationnaires en général (chapitre 1), dont la théorie dans l'espace d'état fait l'objet d'une critique, et l'optimisation quadratique en particulier (chapitre 2), qui fournit une structure de régulation coïncidant avec les régulations classiques utilisant des tendances. Ce n'est donc, à priori, qu'un autre point de vue théorique donnant pour les systèmes linéaires stationnaires un bouclage de même type. On montrera d'ailleurs (chapitre 2) que toutes les caractéristiques de structure, de stabilité et d'insensibilité recherchées en régulation classique se retrouvent dans cette méthode dont l'application, de surcroît, ne présente - ce qui est primordial - aucune nouvelle complication pour les systèmes multivariables. En outre, les tendances sont obtenues naturellement et globalement. Ce dernier qualificatif pourrait être considéré quelquefois comme un inconvénient, car la moindre défectuosité dans une des chaînes pourrait engendrer un mauvais fonctionnement général de l'installation. Ceci peut être aisément évité en traitant l'ensemble du processus comme un agglomérat de sous-systèmes élémentaires, dont il est loisible ensuite de coordonner le fonctionnement.

Lorsque le système physique à réguler est perturbé de manière aléatoire, on emploie le "principe de séparation" qui fournit un bouclage constitué de l'estimateur de Kalman en cascade avec l'optimiseur correspondant au système déterministe (chapitre 3).

Si la théorie des critères quadratiques est bien connue, son application offre quelques difficultés (dont l'apparition d'écarts permanents dus aux imprécisions de modèle) que nous nous sommes efforcés de résoudre (chapitre 3). Notamment l'application en ligne sur unité pilote au moyen de calculateur ana-

logique est décrite.

Le procédé de régulation de cette première partie est bien adapté au cas où les perturbations sont de faible amplitude et ainsi ne provoquent pas l'entrée en saturation des organes réglants.

Si, en revanche, on a affaire à un "problème de poursuite" ou à des perturbations de grande amplitude, nous entrons dans le second stade de la régulation optimale dynamique fonctionnelle, le plus difficile quant à la mise en oeuvre, celui où l'on doit impérativement tenir compte des contraintes.

Le traitement théorique de ce problème fait l'objet de la seconde partie qui comporte quatre chapitres relatifs aux méthodes déjà citées, l' "invariant imbedding" et les méthodes variationnelles.

Après quelques précisions sur l' "invariant imbedding", on démontre que les équations obtenues, compte-tenu de contraintes sur la commande sont solutions des équations d'Hamilton Pontryagin (chapitre 1). On montre ensuite que, pour un critère quadratique, les trajectoires avec commande contrainte sont obtenues par un seul balayage d'un système différentiel ordinaire (chapitre 2).

Les méthodes variationnelles sont plutôt abordées du point de vue des contraintes sur l'état. En effet, selon le point de vue considéré, on obtient des variables adjointes dont les discontinuités sont plus ou moins aisées à traiter sur calculateur (chapitre 3). Dans tous les cas cependant, on est amené à résoudre par voie analogique, numérique ou hybride des problèmes à valeurs limites en plusieurs points. Les algorithmes nécessaires sont développés au chapitre 4. On constate notamment que, si ce type de problème peut être résolu en des temps compatibles avec la commande en ligne, il n'en requiert pas moins une quantité de matériel non négligeable.

Dans ces conditions, il sera, dans les prochaines années, soit justifié de recourir à des techniques sous optimales (3ème partie).

Après quelques considérations sur la régulation sous optimale (chapitre 1), on adapte et applique une méthode utilisant des algorithmes d'apprentissage, où l' "information optimale" provient des résultats obtenus dans la seconde partie.

Enfin, on trouvera en annexe un développement sur le générateur de vapeur qui fut le support de nos recherches, dans le but principal de préciser la validité de cette unité pilote.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- M. ATHANS - "The status of optimal control theory and applications for deterministic systems" (Survey paper).
IEEE transactions
vol. AC 11 n°3 July 1966 pp 580-596

- 2- G. LEITMANN (Ed) - "Optimization techniques with applications to aerospace systems". Academic Press 1962.

- 3- Projet CHANCE - 1966-1967 Publications Laborelec. EBES.
Université libre de Bruxelles.

- 4- R. HOCEPIED - La régulation fonctionnelle - Journées AFLET/IBRA
"Nouvelles possibilités des régulateurs analogiques"
Bruxelles 4 février 1971.

- 5- R. CHAUSSARD - "Rational ajustement of the controls of a thermal
J. GRAUVOGEL power station".
G. DAVOUST Paper 21 - A - 3 rd IFAC Congress :
20-25 June 1966 LONDON.

- 6- Abaque et fascicules - Publications EDF (Direction des Etudes et Recherches)
EDF sur la détermination des régulateurs. 1965-1966

- 7- D. MARCHAND - "Synthèses des systèmes multivariables"
Rapport final du contrat DGRST n° 6700498
Publication ECA Automation

- 8- Y. TAKAHASHI - "Control and dynamic systems" Chapter 8
M. RABINS 1970. Addison Wesley
D. AUSLANDER

- 9- P. NASLIN - "Theorie de la commande et conduite optimale"
Chapitre 7 - DUNOD 1969.

PREMIERE PARTIE

REGULATION OPTIMALE QUADRATIQUE

Cette première partie concerne la régulation optimale des systèmes multivariables linéaires et stationnaires, abstraction faite de toutes contraintes - inégalités relatives aux commandes ou aux états.

Pour de tels systèmes, l'optimisation quadratique doit prendre, sur le plan théorique, le relais des méthodes classiques de régulation inopérantes en multivariable, et ainsi constituer la première étape vers une régulation optimale dynamique fonctionnelle.

Le chapitre I constitue une étude critique des méthodes de commande multivariable de l'espace d'états permettant de dégager l'intérêt de l'optimisation.

Le chapitre II rappelle les résultats fondamentaux de l'optimisation quadratique et montre qu'on y retrouve l'ensemble des aspects positifs de la régulation classique, fournissant ainsi des arguments propres à convaincre les utilisateurs potentiels. Un développement est également consacré au complément indispensable de la méthode : la reconstruction des états.

Le chapitre III, enfin, présente l'application de l'optimisation quadratique stochastique au générateur de vapeur pilote (cf. annexe).

Il faut noter que cette première partie vise avant tout à susciter l'intérêt des praticiens. On s'est donc attaché beaucoup plus à éclaircir le contenu et la signification des théories existantes qu'à reproduire leurs démonstrations avec la rigueur généralement souhaitée par les mathématiciens.

LA REGULATION MULTIVARIABLE DANS L'ESPACE D'ETAT

Il n'est pas inattendu de constater que les théoriciens de l'espace d'état ont repris des idées développées dans le domaine fréquentiel, tels que le découplage, l'invariance et la position des pôles.

1 - LE DECOUPLAGE -

L'idée de base est de convertir le processus multivariable en un ensemble de sous systèmes monovariables que l'on sait réguler. Ceci suppose bien sûr une fâcheuse restriction : la dimension du vecteur de commande doit être égale à celle du vecteur de sortie.

Le problème de découplage le plus simple (pas de modification de l'ordre du système original) se pose comme suit :

Pour un processus d'équations :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} & \dim \underline{u} &= \dim \underline{y} = m \\ \underline{y} &= \underline{C} \underline{x} & \dim \underline{x} &= n \end{aligned} \quad (1)$$

Quelles sont les matrices $\underline{F}$, $\underline{G}$: $\underline{u} = \underline{F} \underline{x} + \underline{G} \underline{r}$, qui donnent $\underline{y} = \underline{\Lambda}(t) \underline{r}$ avec $\underline{\Lambda}$ diagonale ? Il serait de plus souhaitable que ces matrices permettent un choix arbitraire des pôles de chacun des sous systèmes.

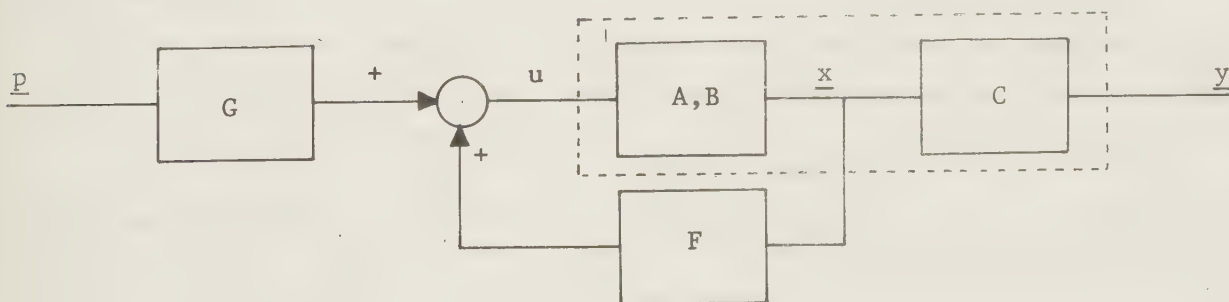


Fig. (1)

Remarquons que la recherche d'un vecteur de commande de découplage tel que $\underline{u} = \underline{F}_1 \underline{y} + \underline{G} \underline{r}$ n'est, du moins sur le plan théorique, qu'un cas particulier du problème précédent car, alors, $\underline{u} = \underline{F}_1 \underline{C} \underline{x} + \underline{G} \underline{r}$.

Parmi les solutions apportées à ce problème, deux peuvent être retenues : celle de B. S. MORGAN ^{†2†} et la condition nécessaire et suffisante de P. L. FALB et W. A. WOLOWICH ^{†3†}.

1-1 La solution de B. S. MORGAN

On suppose que les n premières composantes du vecteur $\underline{x}$ (soit $\underline{x}_1$) constituent le vecteur de mesure.

L'équation d'état du système découplé s'écrit

$\dot{\underline{x}} = (A + B F) \underline{x} + B G \underline{r}$ (2), que l'on peut partitionner selon

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_1 \\ \dot{\underline{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 F_1 & A_{12} + B_1 F_2 \\ A_{21} + B_2 F_1 & A_{22} + B_2 F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 G \\ B_2 G \end{bmatrix} \underline{r}$$

$$\text{où } F = \begin{bmatrix} m & n-m \\ F_1 & F_2 \end{bmatrix}^m \quad A = \begin{bmatrix} m & n-m \\ A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^m \quad B = \begin{bmatrix} m \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}^m$$

La condition suffisante de découplage (c'est-à-dire $\underline{x}_1 = \Lambda \underline{r}$ avec Λ diagonale) est donc

$$A_{12} + B_1 F_2 = 0$$

$$A_{11} + B_1 F_1 = D_1 \quad \text{et } B_1 G = D_2$$

avec D_1, D_2 matrices diagonales arbitraires.

Si B_1 est non singulière, la solution est

$$F_1 = -B_1^{-1} (A_{11} - D_1)$$

$$F_2 = -B_1^{-1} A_{12}$$

$$G = B_1^{-1} D_2$$

Il apparaît que cette condition suffisante, trop forte, ne permet pas, outre le découplage, de procéder à la régulation en imposant un choix des pôles. En effet, l'équation caractéristique du système global est donnée par

$$\det (D_1 - \lambda I) \det (A_{22} + B_2 F_2 - \lambda I) = 0$$

et donc si m pôles peuvent être fixés par D_1 , par contre les $n-m$ autres sont imposés par le système initial.

1-2 La solution de FALB-WOLOWICH

Le théorème suivant est une condition nécessaire et suffisante de découplage :

"Il existe (F, G) qui découple le système (1) si et seulement si la matrice $m \times m B^$ est non singulière".*

par définition $B^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} B \\ c_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m} B \end{bmatrix}^+$

où c_i est la i ème ligne de C
 et $d_i = \min \{ j : c_i A^j B \neq 0, j=0, \dots, n-1 \}$
 par exemple : $d_2 = 3$ si $c_2 B = c_2 AB = c_2 A^2 B = 0$
 et $c_2 A^3 B \neq 0, c_2 A^4 B \neq 0, \dots$

Sans aller dans les détails de la démonstration des auteurs, quelques commentaires s'imposent :

Il est apparent que si B^* est de rang m , le système (1) est à sortie complètement commandable puisque le critère de commandabilité pour la sortie de (1) s'écrit :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} CB : CAB : \dots : CA^{n-1}B \end{bmatrix} = m$$

Or, si (1) est commandable il est bien connu que (2) l'est aussi (et inversement) ; et comme la commandabilité de (2) est intuitivement une condition nécessaire de découplage -1-, il n'est pas surprenant que le découplage nécessite la non singularité de B^* .

D'autre part, (et c'est là la motivation de l'auteur), en dérivant successivement les composantes de $\underline{y}$ du système (2), on trouve :

$$y_i^{(d_i+1)} = c_i (A + BF)^{d_i+1} \underline{x} + c_i A^{d_i} B G \underline{r}, \text{ ou encore sous forme vectorielle :}$$

$$\underline{y}^* = (A^* + B^* F) \underline{x} + B^* G \underline{r} \quad (3)$$

où $A^* = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_m A^{d_m+1} \end{bmatrix}$ et $\underline{y}^* = \begin{bmatrix} y_1^{(d_1+1)} \\ \vdots \\ y_m^{(d_m+1)} \end{bmatrix}$

Le découplage a lieu si les dérivées des y_i ne dépendent que de r_i , soit, d'après (3) en prenant, par exemple, $G = + (B^*)^{-1}$ et $F = - (B^*)^{-1} A^*$, ce qui suppose que B^* soit de rang m .

+ Remarquons que si tous les d_i sont nuls, on retrouve le résultat de MORGAN.

Si l'on souhaite également pouvoir fixer arbitrairement les pôles, les auteurs préconisent de choisir :

$$F = (B^*)^{-1} \left[\begin{array}{c} \delta \\ \sum_{k=0}^{\delta} M_k CA^k - A^* \end{array} \right] \text{ avec } \delta = \max d_i$$

M_k matrices diagonales

et $G = (B^*)^{-1}$

qui donnent :

$$\underline{y}^* = \sum_{k=0}^{\delta} M_k \underline{y}^{(k)} + \underline{r}$$

Ainsi certains pôles sont liés au choix des M_k . L'inconvénient de cette méthode réside précisément dans ce choix, et les auteurs admettent eux-mêmes qu'il reste beaucoup à faire avant que le procédé devienne opérationnel.

Sur le plan théorique, un grand pas a cependant été franchi et il serait étonnant que des applications ne soient pas mises en oeuvre.

C'est donc plutôt le principe même du découplage qui suscite des objections :

A l'origine, vers 1955, la motivation de ce type de méthode résidait soit dans des besoins isolés, soit dans l'absence de méthodes multivariables, ce qui peut conduire dans une certaine mesure à s'interroger sur son efficacité. De fait, il s'avère que, sauf cas particuliers, la totalité des pôles du système ne peut être choisie ce qui incite à considérer la méthode comme un moyen et non une fin.

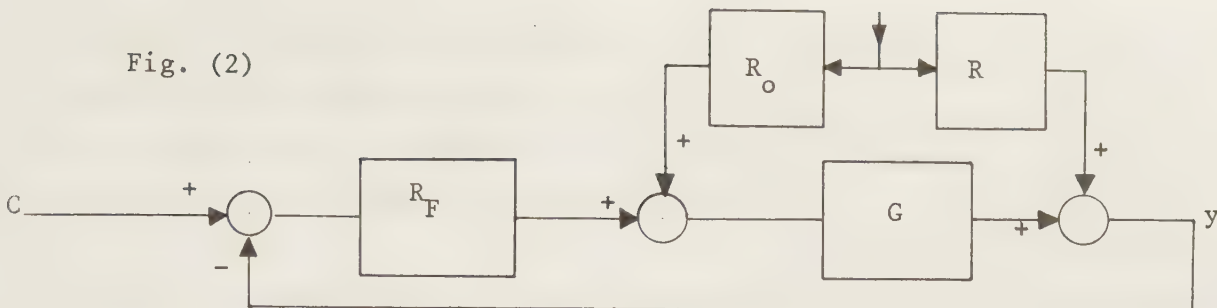
En un mot, on a imposé une structure telle au processus bouclé que l'éventail des performances possibles s'en trouve limité.

2 - L'INVARIANCE -

C'est aussi un vieux problème de la théorie classique que de chercher à rendre les grandeurs réglées insensibles aux perturbations.

Nous rappelions dans l'introduction que le but des tendances (feed-forward) est de contrecarrer les perturbations mesurables $p(t)$ en les injectant à l'aide d'un régulateur R_0 , tel que $R + G R_0 = 0$, qui provoque l'annulation de $\underline{y}$ quel que soit p .

Fig. (2)



De même, si les perturbations ne sont pas mesurables la position et le choix judicieux d'un régulateur peuvent engendrer l'invariance.

Dans l'espace d'état, ces deux problèmes peuvent, pour un processus multivariable, être formulés ainsi :

1) Si les perturbations sont mesurables

Le système s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{u} + D \underline{p} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned}\quad (1)$$

et l'on doit déterminer les matrices F, G et H de $\underline{u} = F \underline{x} + G \underline{r} + H \underline{p}$ (2) qui insensibilisent $\underline{y}$ à l'influence de $\underline{p}$.

Le système ainsi commandé a pour équations :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= (A + B F) \underline{x} + B G \underline{r} + (B H + D) \underline{p} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned}\quad (3)$$

2) Si les perturbations ne sont pas mesurables

L'organe de commande est alors seulement :

$$\underline{u} = F \underline{x} + G \underline{r} \quad (4)$$

ce qui donne pour le système bouclé :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= (A + B F) \underline{x} + B G \underline{r} + D \underline{p} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned}\quad (5)$$

L'essentiel de la théorie de l'invariance a été développé par ROZONOER -4-, aussi bien pour les systèmes non linéaires que linéaires non stationnaires. Bien que seuls les résultats des processus linéaires soient ici recherchés, il n'est pas sans intérêt de noter la raison du succès des travaux de ROZONOER : c'est l'utilisation de la théorie de l'optimisation et plus précisément du calcul des variations qui lui a permis de résoudre théoriquement le cas non linéaire.

Ainsi, la sortie $\underline{y}$ est assimilée à un critère de performances $J(t)$, et le système est dit "fortement invariant" si $\delta J(t) \approx 0$ quel que soit $\delta p(t)$

($t > 0$). La variation δJ est alors calculée au moyen des variables adjointes.

Le résultat obtenu par ROZONOER sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante n'est pas inattendu puisqu'il stipule que le processus doit être non commandable par la perturbation (au sens où cette perturbation n'agit nullement sur les sorties) -6-.

Ainsi, par exemple pour le système (1), la condition d'invariance s'exprime par $C A^k D = 0$ quel que soit $k = 0, \dots, n-1$.

L'important, pour l'application, est de considérer les critères d'invariance pour les systèmes (3) et (5) :

a) Pour le système (3)

Seul le cas simplifié avec une perturbation et une mesure est traité. La condition nécessaire et suffisante d'invariance s'écrit :

$$\underline{c} (A + B F)^k (B \underline{h} + \underline{d}) = 0 \text{ quel que soit } k = 0, \dots, n-1$$

qui permet de déterminer F et $\underline{h}$

- calcul de $\underline{h}$

pour $k = 0$ il faut $\underline{c} (B \underline{h} + \underline{d}) = 0$

si $\underline{d}$ est dans le domaine d'application de B , on prendra

$$\underline{h} : B \underline{h} = -\underline{d}$$

si ce n'est pas le cas, on choisira $\underline{h} : \underline{c}^T$ perpendiculaire à $B \underline{h} + \underline{d}$

- calcul de F

F devra satisfaire

$$\underline{c}^T \text{ perpendiculaire à } (A + B F)^k (B \underline{h} + \underline{d}) \text{ pour } k = 1, \dots, n-1$$

b) Pour le système (5) (également simplifié)

La condition d'invariance est $\underline{c} (A + B F)^k \underline{d} = 0$

qui donne $\underline{c}^T$ perpendiculaire à $\underline{d}$ pour $k = 0$

et $\underline{c}^T$ perpendiculaire à $(A + B F)^k \underline{d}$ pour $k = 1, \dots, n-1$

Il est facile de constater par la visualisation dans l'espace à trois dimensions que, dans les deux cas (a et b), si la matrice F et le vecteur $\underline{d}$ ne sont déterminés qu'à une "rotation" près, il n'en résulte pas moins une famille de pôles (donnés par $A + B F - \lambda I = 0$) et il sera donc généralement impossible, d'imposer arbitrairement les dynamiques du processus en boucle fermée.

La conclusion s'affirme donc : l'invariance n'est pas, non plus que le découplage, une méthode de synthèse multivariable en elle-même. C'est

d'ailleurs la sévérité de la condition nécessaire et suffisante obtenue qui rend certaines performances impossibles à réaliser. Il manque dans cette méthode, comme souvent en théorie pure, un aspect qualitatif nécessaire à toute application : il n'est en effet pas souhaitable que les sorties soient totalement insensibles aux perturbations mais faiblement sensibles. POZONOFF d'ailleurs introduit la notion de " ϵ invariance" (c'est-à-dire $\|y(t) - y(t_0)\| < \epsilon$) nous entrons là dans le domaine des théories de la sensibilité où, cependant, il n'existe pas, à notre connaissance, de résultats généraux aisément applicables aux systèmes multivariables.

3 - LE PLACEMENT ARBITRAIRE DES POLES -

Placer arbitrairement les pôles d'une fonction de transfert c'est directement ou indirectement l'essence de la quasi totalité de la théorie classique des asservissements. En effet, l'étude du lieu des pôles par la méthode d'EVANS est un moyen très utilisé de calcul d'un servomécanisme. De même, les méthodes fréquentielles de réglage de gain ou de compensation permettent indirectement de fixer les pôles prédominant du système en ce sens que la forme de la portion importante de la fonction de transfert est imposée.

Il n'est donc pas surprenant de constater l'intérêt suscité par l'idée de fixer les valeurs propres de la matrice d'état du système multivariable.

Pour rester dans l'esprit de simplicité de mise en oeuvre auquel nous nous sommes attachés dans ce chapitre, nous ne considérerons que les placements de pôles obtenus par bouclage statique sur les états. Ceci signifie que si le système est décrit par $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}$ le bouclage sera $\underline{u} = \underline{k} \underline{x}$.

3-1 Le cas monocommande

On sait que tout système commandable de la forme $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} \underline{u}$ (1) peut par un changement de variable $\underline{z} = \underline{P} \underline{x}$ s'écrire dans l'espace de phase :

$$\dot{\underline{z}} = \underline{A}_1 \underline{z} + \underline{b}_1 \underline{u} \quad (2)$$

$$\text{avec } \underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad \text{et } \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ce résultat est bien connu pour la conversion des fonctions de transfert (qui concernent des systèmes commandables) en équations d'état,

mais le passage direct de (1) à (2), que l'on trouvera en appendice, s'avère très instructif pour une éventuelle généralisation au cas multivariable.

Si la commande est choisie de la forme $u = \underline{c}^T \underline{z}$ (3) le polynôme caractéristique du système bouclé (2) + (3) devient

$$z^{(n)} + (a_n - c_n) z^{(n-1)} + \dots + (a_1 - c_1) z = 0$$

dont tous les coefficients sont modifiables à volonté par les c_i . Il s'en suit la possibilité d'un choix arbitraire des pôles.

3-2 Le cas multicommande - commande modale

Le résultat précédent a été généralisé par WONHAM -5- en ces termes :

"Pour un système $\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u}$ de commande $\underline{u} = K \underline{x} + \underline{r}$, la paire (A, B) est commandable, si et seulement si, pour tout choix de l'ensemble Λ , il y a une matrice K telle que $A + B K$ ait Λ pour spectre" (spectre = ensemble des valeurs propres).

La démonstration repose sur le fait suivant :

Pour une paire (A, B) commandable et se présentant sous une forme canonique (cf. appendice), il est possible de construire une matrice K_i telle que la paire $(A + B K_i, \underline{b}_i)$ soit commandable ($\underline{b}_i$ = une colonne quelconque de B). Cela signifie que le nouveau système est commandable par une seule entrée.

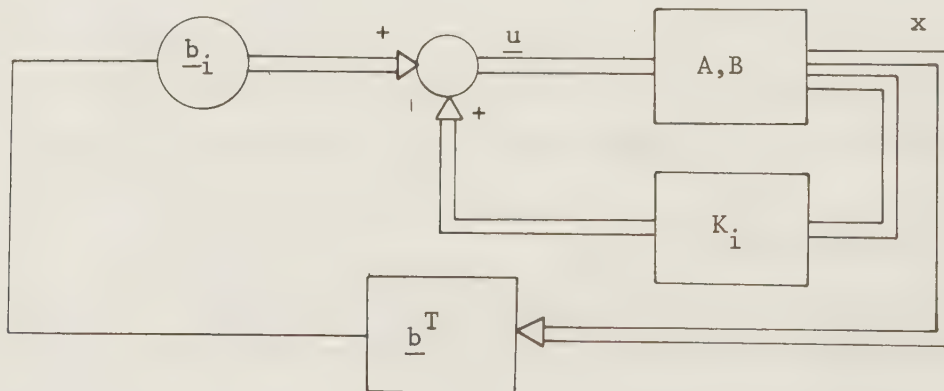


Fig.(3)

Ayant trouvé K_i , il reste à déterminer $\underline{b}$ de telle sorte que $A + B (K_i + \underline{b}_i \underline{b}^T)$ ait Λ pour spectre.

La mise sous forme canonique et la construction de K_i sont cependant longues et fastidieuses et si la valeur de la méthode est indéniable quant à la démonstration du théorème il ne semble pas qu'elle constitue un moyen pratique intéressant.

Parallèlement à ce résultat théorique fondamental, des méthodes pratiques ont été développées sous le vocable de "commande modale" -7- dont voici le principe.

Supposant que la matrice A de $\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u}$ (1) possède des vecteurs propres distincts permettant de la diagonaliser à l'aide du changement de variable $\underline{x} = P \underline{z}$:

$$(1) \text{ devient } \dot{\underline{z}} = P^{-1} A P \underline{z} + T^{-1} B \underline{u} = D \underline{z} + T^{-1} B \underline{u} \quad (2)$$

D = matrice diagonale

Le bouclage est choisi tel que $T^{-1} B \underline{u} = -K \underline{z}$ (3) ce qui suppose que B soit carrée non singulière (c'est-à-dire $\dim \underline{u} = \dim \underline{x}$) pour permettre d'élaborer le vecteur $\underline{u}$.

$$(2) \text{ devient alors } \dot{\underline{z}} = (D - K) \underline{z} \quad (4)$$

dont les dynamiques sont ajustables à Λ au moyen de K, elle-même diagonale.

Rappelons que le vecteur $\underline{x}$ vaut $P e^{\Lambda t} \underline{z}_0$ ou $\sum_{i=1}^n p_i e^{\lambda_i t} \alpha_i$ (somme des modes propres)

avec p_i = vecteur propre de A (colonne de P)

λ_i = terme de la matrice Λ diagonale

α_i = fonction linéaire des conditions initiales



Dans le cas plus réaliste où le nombre des commandes n'est pas égal au nombre des états, il est impossible de modifier la totalité des pôles mais la méthode est cependant efficace si les commandes permettent d'agir sur les modes prédominants -7-

4 - CONCLUSION -

Des trois types de méthodes de commande multivariable présentées, la commande modale est sans nul doute la plus valable, car elle tend à réaliser directement ce que le découplage et l'invariance empêchent de faire : choisir à volonté les dynamiques du système bouclé. Il est cependant intéressant de noter que l'invariance, si elle pouvait être modulée (à l'invariance) serait un

complément utile à la méthode du placement des pôles qui ne considère nullement l'effet des perturbations.

Malgré tout, est-ce bien le lieu des pôles qui intéresse l'utilisateur et lui parle clairement ? Ne serait-ce pas plutôt les classiques notions des servomécaniciens ou des techniciens de la régulation telles que le temps de réponse, le dépassement indiciel, l'amortissement ?

Autrement dit, l'utilisateur ne souhaite-t-il pas, dans l'état actuel d'imprécision des mesures et de complexité des processus, imposer de manière succincte et globale quelques performances "explicites" ?

Précisément, l'optimisation fonctionnelle quadratique permet, par simple ajustement d'un minimum de coefficients, de pondérer les écarts de régulation des différentes grandeurs réglées. Si, par contre, l'obtention d'un temps de réponse imposé n'est pas aussi rapidement réalisable, une autre caractéristique de cette méthode apparaît fondamentale.

En effet, une fois que les grandeurs à réguler ont atteint les performances dynamiques requises, l'utilisateur peut constater que des contraintes nominales de fonctionnement sont largement dépassées, car les commandes sont trop énergiques. Il lui est alors possible, pour un choix judicieux du critère de performances, de modifier, de manière quantitative, les variations d'énergies des organes réglants.

Cet aspect est précisé dans le chapitre suivant entièrement consacré à l'optimisation quadratique.

Appendice

TRANSFORMATIONS CANONIQUES

1 - Soit les systèmes $\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + \underline{b} u$ (1)

$\dot{\underline{z}} = A_1 \underline{z} + \underline{b}_1 u$ (2)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lemme

Si (A, b) est commandable, il existe une matrice P non singulière telle que $\underline{z} = P \underline{x}$ (3) et qui permet de convertir (1) en (2).

Démonstration (par construction)

La première composante de $\underline{z}$ dans la relation (3) peut s'écrire $z_1 = p_1 \underline{x}$ (4) où p_1 est la 1ère ligne de P que l'on veut déterminer.

(4) et (2) donnent

$$\dot{z}_1 = z_2 = p_1 \dot{\underline{x}} = p_1 (A \underline{x} + \underline{b} u)$$

Une CNS pour que $\underline{z} = P \underline{x}$ est : $p_1 \underline{b} = 0$

$$\dot{z}_2 = z_3 = p_1 A (A \underline{x} + \underline{b} u) \implies p_1 A \underline{b} = 0 \text{ pour la même raison}$$

.....

.....

$$\dot{z}_{n-1} = z_n = p_1 A^{n-1} \underline{x} \quad \text{avec} \quad p_1 A^{n-2} \underline{b} = 0$$

$$\text{On a finalement } \underline{z} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \\ \vdots \\ p_1 A^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x} \quad (5)$$

avec $n-1$ relations pour déterminer p_1 :

$$p_1 \underline{b} = p_1 A \underline{b} = \dots = p_1 A^{n-2} \underline{b} = 0 \quad (6)$$

La $n^{i\text{ème}}$ condition est fournie par la relation entre $\underline{b}$ et $\underline{b}_1$

soit $P \underline{b} = \underline{b}_1$

$$\text{ou } \begin{bmatrix} p_1 \underline{b} \\ p_1 A \underline{b} \\ \vdots \\ p_1 A^{n-1} \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{qui redonne (6)} \\ \text{et } p_1 A^{n-1} \underline{b} = 1 \quad (7) \end{array}$$

(6) et (7) peuvent s'écrire

$$p_1 \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underline{b} & A \underline{b} & \dots & A^{n-1} \underline{b} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right]$$

On reconnaît ici la matrice de commandabilité Q dont l'inverse existe si le système (1) est commandable.

Donc, pour un système commandable

$$p_1 = (0 \dots 0 1) Q^{-1} \quad (8) \quad (p_1 \text{ est la dernière ligne de } Q^{-1}).$$

Il reste à démontrer que la matrice P trouvée en (5) est non singulière, ce qui est vrai si le noyau de P n'est constitué que du vecteur 0

$$(P \underline{\lambda} = 0 \iff \underline{\lambda} = \underline{0} \text{ (ce que nous allons montrer)}).$$

Remarquons que (6) signifie que p_1 appartient au complément orthogonal $E^\perp$ de l'espace E de dimension $n-1$ et défini par $(\underline{b}, A \underline{b}, \dots, A^{n-2} \underline{b})$.

Il y a donc deux possibilités pour $\underline{\lambda}$: soit $\underline{\lambda} \in E$, soit $\underline{\lambda} \in E^\perp$

$$\text{a) si } \underline{\lambda} \in E^\perp \quad \underline{\lambda} = \alpha p_1^T$$

$$P \underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \alpha p_1 p_1^T \\ \alpha p_1 A p_1^T \\ \vdots \\ \alpha p_1 A^{n-1} p_1^T \end{bmatrix} = 0 \implies \alpha = 0 \text{ puisque } p_1 \neq 0 \\ \text{donc } \underline{\lambda} = 0$$

$$\text{b) si } \underline{\lambda} \in E \quad \underline{\lambda} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A^{i-1} \underline{b}$$

$$\begin{aligned}
 p \underline{\lambda} = & \left[\begin{array}{l} p_1 (\alpha_1 b + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-2} b) \\ p_1 (\alpha_1 A b + \dots + \alpha_{n-2} A^{n-2} b + \alpha_{n-1} A^{n-1} b) \\ p_1 (\alpha_1 A^2 b + \dots + \alpha_{n-2} A^{n-1} b + 0) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right] \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \implies \alpha_{n-1} = 0 \\ = 0 \implies \alpha_{n-2} = 0 \\ \vdots \\ = 0 \implies \alpha_1 = 0 \\ \text{car } p_1 A^{n-1} b = 1 \end{array} \\
 & \implies \underline{\lambda} = 0
 \end{aligned}$$

Remarque : D'après (8), la matrice de commandabilité Q joue un rôle fondamental dans la conversion du système (1) en le système (2). Ce fait est généralisé ci-dessous dans le but d'obtenir des résultats semblables en multivariable.

2 - Soit les systèmes complè- $\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u}$ (9) $\dim \underline{x} = n$
 tement commandables $\dot{\underline{z}} = A_1 \underline{x} + B_1 \underline{u}$ (10) $\dim \underline{u} = m$

Pb : calculer P ($z = P x$) qui transforme (9) en (10).

Remplaçant $\underline{z}$ par sa valeur dans (10), on constate que l'équivalence de (9) et (10) impose :

$$PA = A_1 P \quad (11)$$

$$\text{et } PB = B_1 \quad (12)$$

Faisons apparaître les matrices de commandabilité Q et Q_1

$$\begin{aligned}
 (12) \text{ donne } B_1 &= P B, A_1 B_1 = A_1 P B \stackrel{\text{d'après}}{=} P A B, A_1^2 B = P A^2 B, \dots \\
 & \quad (11)
 \end{aligned}$$

finally

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B_1 & A_1 B_1 & A_1^2 B_1 & \dots & A_1^{n-m} B_1 \end{array} \right] &= P \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} A B & A^2 B & \dots & A^{n-m} B \end{array} \right] \\
 \text{soit } Q_1 &= P Q \quad (13)
 \end{aligned}$$

Dans le cas monocommande Q est carrée, non singulière, donc
 $P = Q_1 Q^{-1}$ (14) (c'est le résultat du § 1 pour un couple (A_1, b_1) quelconque).

Mais si $m \neq 1$ Q et Q_1 ne sont plus carrées :

(13) peut cependant s'écrire

$$Q_1 Q^T = P Q Q^T$$

$$\text{soit } P = (Q_1 \ Q^T) (Q \ Q^T)^{-1} \quad (15)$$

On peut montrer que cette matrice P est unique.

Remarques : 1) P apparaît comme une combinaison des vecteurs de la matrice de commandabilité du système (9). En ce cas, il n'est pas surprenant que pour avoir un système (10) canonique, des auteurs -5- -9- aient utilisé des matrices de changement de base P formées de n vecteurs indépendants puisés dans Q.

2) Parmi les formes canoniques $(A_1 \ B_1)$ obtenues, citons celle utilisée par WONHAM -5-

$$A_1 = \begin{bmatrix} A^1 & A^{12} & \dots & A^{1s} \\ & A^2 & \dots & A^{2s} \\ [0] & & \dots & A^{s-1s} \\ & & & A^s \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & [0] & \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & 1 & \\ \vdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

- les A^i sont des matrices "compagnon" du type A_1 du 1.

- les A^{ij} sont de cette forme $\begin{bmatrix} + \\ + \\ + [0] \\ + \\ + \end{bmatrix}$ (+ = terme non nul)

Le système multivariable $(A_1 \ B_1)$ se présente donc comme un ensemble de s sous système de la forme (2), couplés entre eux par les A^{ij} .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- KREINDLER SARACHIK IEEE transactions vol. A C 9
"On the concepts of controllability and observability of linear systems"
April 1964 pp. 129-136.

- 2- B. S. MORGAN
"The synthesis of linear multivariable systems by state variable feed-
back" IEEE transactions vol. A C 9 n° 4 october 1964 pp. 405-411.

- 3- P. L. FALB W. A. WOLOVICH
"Decoupling in the design and synthesis of multivariable control sys-
tems" IEEE transactions vol. A C 12 n° 6 december 1967 pp. 651-659.

- 4- L. I. ROZONOER
"A variational approach to the problem of invariance of automatic control
systems" automation and remote control vol. 24 n° 6 et vol. 24 n° 7 - 1963.

- 5- W. M. WONHAM
"On pole assignment in multi input controllable linear systems" IEEE
transactions vol. A C 12 n° 6 december 1967 pp. 660-665.

- 6- P. K. C. WANG
"Invariance, uncontrollability and unobservability in dynamical systems"
IEEE transactions vol. A C 10 n° 3 july 1965 pp. 366-367.

- 7- Y. TAKAHASHI et al
"Control" Addison wesley 1970 chap. 10.

- 8- R. E. KALMAN P. L. FALB M. A. ARAB
"Topics in mathematical system theory" Mc Graw-Hill 1969 chap. 2.

- 9- D. G. LUENBERGER
"Canonical forms for linear multivariable system" IEEE transactions
vol. A C 12 n° 3 june 1967 pp. 290-293.

Chapitre II

OPTIMALISATION QUADRATIQUE

La théorie de l'optimalisation des systèmes linéaires avec critères quadratiques fait maintenant partie du bagage normal de tout automaticien : nous ne la rappellerons ici que pour référence.

Il y a, cependant, certaines notions indispensables lors des applications qui méritent que l'on s'y attarde quelque peu. Dans cet esprit, on trouvera dans le premier paragraphe un développement sur le contenu du critère de performance permettant de satisfaire l'utilisateur qui, notamment, souhaite un vieillissement modéré de son processus.

Le second paragraphe est destiné à montrer que l'optimalisation quadratique possède toutes les caractéristiques de la régulation classique mono-variable, et qu'elle est donc bien, en quelque sorte, sa généralisation aux systèmes multivariables. Ceci rejoint une assertion précédente selon laquelle l'optimalisation quadratique constitue la première étape naturelle vers une régulation optimale industrielle.

Un dernier paragraphe est consacré à un problème sous-jacent et fondamental : celui de la reconstruction du vecteur d'état. Ceci nous amènera à envisager l'aspect stochastique de l'optimalisation quadratique qui fera l'objet d'application dans le chapitre suivant.

A - THEORIE ET PRATIQUE DE L'OPTIMALISATION QUADRATIQUE -

1 - Position du problème

Le processus est supposé régi par les équations

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) + \underline{d}(t) & (1) \quad \dim \underline{x} &= n \\ \underline{y}(t) &= \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{f}(t) & (2) \quad \dim \underline{u} &= p \\ & & \dim \underline{y} &= m\end{aligned}$$

et le critère d'optimalisation est fourni par

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} (\underline{y}^T \underline{L} \underline{y} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u}) dt \quad (3)$$

Plusieurs remarques s'imposent :

- Le problème est purement déterministe (le cas stochastique sera abordé en conclusion).

- Dans le but de traiter un problème réaliste, on a fait apparaître aussi bien les perturbations (déterministes) intervenant dans le processus que celles situées au niveau des sorties. Le terme $\underline{f}(t)$ peut d'ailleurs, tel que le critère est posé, figurer également la consigne du système à réguler; $\underline{y}(t)$ devenant alors l'écart de régulation ou de poursuite.

- Pour que la mise en oeuvre du système de régulation soit industriellement possible, le bouclage doit être stationnaire, ce qui impose que t_0 soit le temps courant t et que T soit quelconque, éventuellement infini.

- L et R sont des matrices symétriques, ou, ce qui est très souhaitable pratiquement, diagonales.

2 - Résolution

La solution variationnelle a été ici préférée à celles de BELLMAN - HAMILTON - JACOBI.

L'Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{1}{2} (\underline{C} \underline{x} + \underline{f})^T L (\underline{C} \underline{x} + \underline{f}) + \frac{1}{2} \underline{u}^T R \underline{u} + \underline{\lambda}^T (\underline{A} \underline{x} + B \underline{u} + \underline{d})$$

Le minimum est donné par :

$$\underline{H}_u = 0 = R \underline{u} + B^T \underline{\lambda} = 0 \quad \underline{u} = -R^{-1} B^T \underline{\lambda} \quad (4)$$

avec $\underline{\lambda}$ tel que :

$$\dot{\underline{\lambda}} = -\underline{H}_x = -\underline{C}^T L \underline{C} \underline{x} - \underline{A}^T \underline{\lambda} - \underline{C}^T L \underline{f} \quad (5)$$

$$\underline{\lambda}(t_0 + T) = 0 \quad (6)$$

$$\text{Posons } \underline{C}^T L \underline{C} = \underline{Q}$$

La structure linéaire des équations (1), (4) et (5) permet de poser pour la solution $\underline{\lambda}(t)$:

$$\underline{\lambda}(t) = \underline{K}(t) \underline{x}(t) + \underline{\phi}(t), \quad \underline{K}(t_0 + T) = 0, \quad \underline{\phi}(t_0 + T) = 0 \quad (7)$$

d'après (6)

$$\text{d'où } \dot{\underline{\lambda}} = \dot{\underline{K}} \underline{x} + \underline{K} \dot{\underline{x}} + \dot{\underline{\phi}} = \dot{\underline{K}} \underline{x} + \underline{K} \underline{A} \underline{x} + \underline{K} \underline{B} \underline{u} + \underline{K} \underline{d} + \dot{\underline{\phi}} \quad (8)$$

(4), (5) et (8) mènent à :

$$(\dot{K} + K A - K B R^{-1} B^T K + Q + A^T K) \underline{x} - K B R^{-1} B^T \underline{\phi} + K \underline{d} + \dot{\underline{\phi}} + C^T L \underline{f} + A^T \underline{\phi} = 0$$

et ceci quel que soit $\underline{x}$ (9)

$$\text{donc } \dot{K} = -K A - A^T K - Q + K B R^{-1} B^T K \quad K(t_0 + T) = 0 \quad (10)$$

$$\dot{\underline{\phi}} = -K \underline{d} + K B R^{-1} B^T \underline{\phi} - C^T L \underline{f} - A^T \underline{\phi} \quad \underline{\phi}(t_0 + T) = 0 \quad (11)$$

La commande en boucle fermée pour un critère en $[t, t + T]$ est finalement fourni par :

$$\underline{u}^* [\underline{x}(t)] = -R^{-1} B^T (K \underline{x}(t) + \underline{\phi}) \quad (12)$$

où K et $\underline{\phi}$ sont les valeurs de $K(t)$ et $\underline{\phi}(t)$, en $t = 0$, obtenues par intégration à rebours de (10) et (11).

Il faut noter que si $\underline{f}$ est une consigne constante ou polynomiale, il peut être intéressant de l'écrire sous forme d'équations d'état afin de faire apparaître explicitement la consigne et de retrouver la structure classique des boucles de régulation avec anticipation.

3 - Problèmes posés par l'application de l'optimisation quadratique

Dans le cas d'une régulation, le vecteur $\underline{y}$ peut être considéré comme l'écart de régulation en supposant que la consigne a été insérée dans le terme $\underline{f}$. Dans ces conditions, il est souhaitable de choisir la matrice L diagonale, de termes l_1 tels que les différents écarts évoluent dans des rapports considérés par l'utilisateur comme admissibles. Ainsi, si y_1 ne doit pas dépasser 0,2 m. quand y_2 doit rester inférieur à 0,1 bar, le rapport entre l_1 et l_2 sera tel que $l_1 (0,2)^2 = l_2 (0,1)^2$ tandis que l_1 , par exemple, sera choisi égal à 1. Les variations absolues des différents écarts de régulation sont elles-mêmes liées à la matrice R , et à la constitution du vecteur $\underline{u}$ que l'on va étudier maintenant.

La dynamique des organes réglants étant généralement très inférieure à celle du processus, on considère le plus souvent que le vecteur de commande est constitué non pas du signal d'excitation de l'organe réglant (par exemple, le courant d'entrée d'un positionneur électro pneumatique), mais de

l'effet dû à cette excitation : par exemple un débit ou plus exactement une énergie ou une puissance. L'inconvénient majeur de ce point de vue réside dans l'obtention d'un mauvais régime permanent lors de l'application de l'optimisation quadratique. En effet, lorsque le point de fonctionnement du processus est imposé, ainsi que la puissance qu'il doit fournir, sa puissance de commande est en régime permanent parfaitement déterminée. Si donc le terme u du critère représente la puissance introduite dans le processus, la présence simultanée de cette puissance et de l'écart de régulation constitue un compromis inadmissible en régime permanent. Pour s'en convaincre, il suffit de procéder au calcul (immédiat) du régime permanent atteint par un système du premier ordre ($\dot{x} = -x + u$) muni d'un critère quadratique tel que $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [(x-1)^2 + u^2] dt$. On trouve qu'il est impossible d'avoir en régime permanent ($\dot{x} = 0$) simultanément $x(\infty) = 1$ et $u(\infty) = 0$ ($J \neq 0$). Le minimum de J est en effet ici obtenu par $x(\infty) = \frac{1}{2}$ et $u(\infty) = \frac{1}{2}$.

De plus, même pour les régimes transitoires, l'utilisateur ne désire qu'une chose : avoir des écarts de régulation nuls. Or, ces écarts minima sont obtenus non pas au prix d'une consommation prohibitive de puissance mais de variations intempestives et dévastatrices de cette puissance. Le compromis doit donc être réalisé entre les y_i et les $\dot{u}_i$ et non entre les y_i et les u_i . Reprenant l'exemple élémentaire ci-dessus on peut se rendre compte qu'avec $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [(x-1)^2 + \dot{u}^2] dt$, on a $x(\infty) = 1$, $\dot{u}(\infty) = 1$ et la puissance requise en régime permanent (soit $u = 1$) pourra être atteinte.

L'un des arguments quelquefois avancé pour utiliser $\dot{u}^2$ dans le critère est le suivant : u est technologiquement contraint entre deux valeurs $u_{\min}$ et $u_{\max}$ et cette information doit être prise en compte par le système de régulation. Or, l'introduction de u^2 dans le critère n'est pas la manière la plus naturelle de représenter des butées qui sont mathématiquement des égalités, et d'autre part la présence simultanée de termes en u^2 et en $\dot{u}^2$ ne faciliteraient pas le choix des termes de pondération du critère.

En définitive, et pour se ramener à la formulation du problème d'optimisation du § A-1, le modèle du processus sera entre autres constitué de p équations ($p = \dim \underline{u}$), telles que $\dot{x}_k = u_i$ ($i = 1, \dots, p$), et la matrice R sera diagonale de terme r_j tels que $r_j \left| u_{j_{\max}} \right|^2 = 1_i \left| y_{i_{\max}} \right|^2$.

Il est donc possible, par optimisation quadratique, de mettre au point un système de régulation réalisant les trois impératifs fondamentaux de fonctionnement : de faibles écarts transitoires, des écarts permanents nuls et des mouvements modérés des organes de commande.

Cependant si, sur le plan théorique, les écarts permanents peuvent être annulés, il en va différemment sur le plan pratique du fait des imprécisions du modèle.

Ainsi, en régime permanent, le terme u^* de l'équation (12) est nul, et si K et ϕ ont été calculés à l'aide d'un modèle faux, il en résulte un vecteur $\underline{x}(\infty)$ ne correspondant pas à $\underline{y}(\infty) = 0$. Les inexactitudes des K et ϕ , à condition qu'elles soient faibles, peuvent être compensées par une modification de ϕ , qui d'ailleurs, effectuée automatiquement, permettra de parler de régulation autoadaptative. Si, en effet, le système régulé atteint au moins passagèrement et de temps en temps un régime permanent, il est alors possible d'ajuster ϕ de telle sorte que l'équation (12) dans laquelle on a substitué le vecteur $\underline{x}(\infty)$ correspondant à $\underline{y}(\infty) = 0$, s'annule. La mise en oeuvre de ce procédé requiert un "détecteur de régime permanent" analysant le "calme" des sorties $\underline{y}$. Cette régulation qui a été réalisée sur le processus pilote a fait l'objet de publications auxquelles il suffira de se reporter -3-. On observera seulement que son rôle peut être comparé à celui de l'intégrateur du PID, à ceci près, qui est fondamental : il n'y a pas d'intégrateur dans les boucles de régulation pendant les régimes transitoires qui ainsi ne sont pas dégradés.

Un autre moyen de pallier les écarts permanents dus aux imprécisions du modèle se dégage de manière naturelle de l'emploi de l'optimisation quadratique stochastique et sera développé au prochain chapitre lors de l'application sur unité pilote.

Avant de terminer ce paragraphe, il est bon d'ajouter quelques mots sur le choix de la période d'optimisation. Ainsi qu'il a déjà été précisé, prendre une période infinie permet d'avoir un bouclage stationnaire. Cet argument qui a trait à la simplicité de mise en oeuvre est non négligeable. Il est quelquefois objecté que ce choix de la période ∞ nécessite la connaissance des perturbations ou des consignes pendant un temps infini. Théoriquement exact, l'expérience montre que ceci est inutile : la commande à un instant t n'est fonction que des événements qui se produisent sur une période $[t, t + T]$ de l'ordre du temps de réponse du processus en boucle ouverte. Ceci satisfait d'ailleurs l'intuition.

Il est donc justifié de substituer à un problème en temps infini un problème en $[t, t + T]$ où T correspond d'ailleurs au temps nécessaire à l'obtention du régime permanent de la matrice de RICCATI (équation 10). En outre, le problème en $[t, t + T]$ présente l'avantage de découvrir de nouvelles informations, de nouveaux événements, séquentiellement, c'est-à-dire naturel-

lement, et non globalement comme le problème en $[t, \infty]$. Remarquons à ce sujet qu'un changement de consigne ou une évolution des perturbations se traduit par une modification du terme ϕ (c'est-à-dire de la consigne et des tendances - le feedforward -) mais pas de K . Autrement dit le bouclage reste stationnaire.

Enfin, le terme T , lorsqu'il est faible, peut être considéré comme un paramètre d'action sur le temps de réponse souhaité pour le processus en boucle fermée.

B - REGULATION CLASSIQUE ET OPTIMALISATION QUADRATIQUE -

Maintenant qu'un critère de régulation opérationnel est défini, il ne nous semble pas sans intérêt de montrer que la régulation optimale qui en résulte possède les caractéristiques positives de la régulation classique monovariante. Ceci est en effet un moyen de convaincre l'utilisateur qui, avec juste raison, aspire à une méthode multivariante possédant la simplicité et l'efficacité des techniques fréquentielles.

Quelle est l'essence des performances obtenues en régulation classique ?

Essentiellement la stabilité, l'insensibilité de la sortie aux variations des paramètres et à l'influence des perturbations : ces performances pouvant être aussi bien quantitatives que qualitatives.

A propos de l'aspect qualitatif de la stabilité, KALMAN a montré dès 1960 -1- la stabilité asymptotique du système d'équations (1) et (12) pour une matrice L définie positive. De plus le paragraphe précédent a montré que le critère choisi assure la stabilité asymptotique c'est-à-dire une transmittance dont les pôles sont à partie réelle négative.

Au lieu donc de s'attarder sur l'esprit bien connu de la stabilité des systèmes linéaires optimaux, il est plus expédient d'en étudier la sensibilité.

D'autre part, l'attrait de la régulation classique résidant dans la simplicité de la structure des régulateurs, il est intéressant de montrer que le critère choisi précédemment mène à une structure de régulateurs identique à celle des régulateurs classiques.

Nous commencerons par l'étude de ce second point.

1 - Structure du régulateur optimal

Toute transmittance de la forme

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad m \leq n-1$$

peut être convertie en un système de variables de phase (cf. appendice du chapitre I) tel que

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + \underline{b} u \\ y &= \underline{c} \underline{x} \end{aligned} \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_0 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c} = b_0 \dots b_m 0 \dots 0$$

Le raisonnement qui suit suppose que le numérateur de la transmittance vaut 1 ($b_0 = 1$, $b_i = 0$, $i = 1, \dots, m$).

La commande de ce système minimalisant le critère

$$J = \int_0^\infty (\underline{y}^T L \underline{y} + r \dot{u}^2) dt \text{ est donnée par}$$

$$\dot{u} = \underline{\lambda}^T \underline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

soit pour la commande u

$$\begin{aligned} u(t) = & \lambda_1 \int_0^t x_1(\tau) d\tau + \lambda_2 (x_1(t) - x_1(0)) + \lambda_3 (x_2(t) - x_2(0)) \\ & + \dots + \lambda_n (x_{n-1}(t) - x_{n-1}(0)) + u(0) \end{aligned}$$

ou en faisant apparaître la sortie

$$\begin{aligned} u(t) = & \lambda_1 \int_0^t y(\tau) d\tau + \lambda_2 y(t) + \lambda_3 \dot{y}(t) + \dots \\ & + \lambda_n y^{(n-2)}(t) + f^+ \text{ (conditions initiales)} \end{aligned}$$

⁺ Le traitement du cas où le numérateur de la transmittance est un polynôme en s d'ordre m mène à une expression de $u(t)$ où les différentes actions classiques apparaissent de manière moins évidente. Cependant, une fois le terme intégral de la sortie écrit, il reste dans $u(t)$ les différents états en relation directe avec les dérivées des sorties.

On retrouve, dans l'expression de cette commande, la structure des PID² ... classiques. Notamment apparaît le terme intégral qui assure la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, et que l'on a introduit au paragraphe précédent avec un point de vue différent de celui de la régulation classique.

L'analogie des deux structures est sensiblement altérée sur le plan pratique quant aux dérivées de la sortie y . En effet, pour une régulation optimale les dérivées successives sont obtenues au moyen de réseaux autres que des dérivateurs, faisant largement intervenir le modèle du processus (cf. paragraphe C : Reconstruction des états). C'est d'ailleurs une caractéristique générale des méthodes de régulation de l'espace d'état que d'employer plus complètement les connaissances que l'on possède du comportement de l'objet à commander. Ceci peut, dans certains cas, constituer un inconvénient mais rien n'empêche, si besoin est, de diminuer au maximum l'ordre du modèle.

2 - La sensibilité des systèmes linéaires optimaux

La sensibilité est probablement l'une des premières notions de l'automatique introduite par l'un des pionniers : BODE. Il n'est cependant pas inutile de la rappeler brièvement sur un exemple élémentaire.

Soit le système monovisible ci-dessous, où k et β sont des constantes

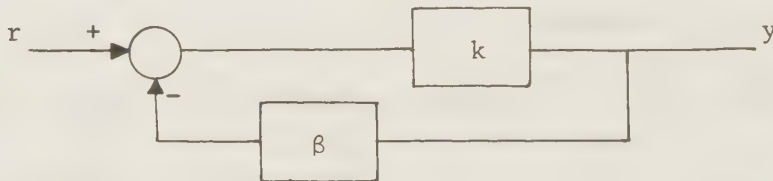


Fig. (1)

En boucle ouverte, l'opérateur T de transmission entre entrée et sortie vaut k , et le terme de sensibilité de la transmission aux variations du gain vaut $\frac{dT}{dk} = 1$.

$$\text{En boucle fermée } T = \frac{k}{1 + \beta k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial k} = \frac{1}{(1 + \beta k)^2}$$

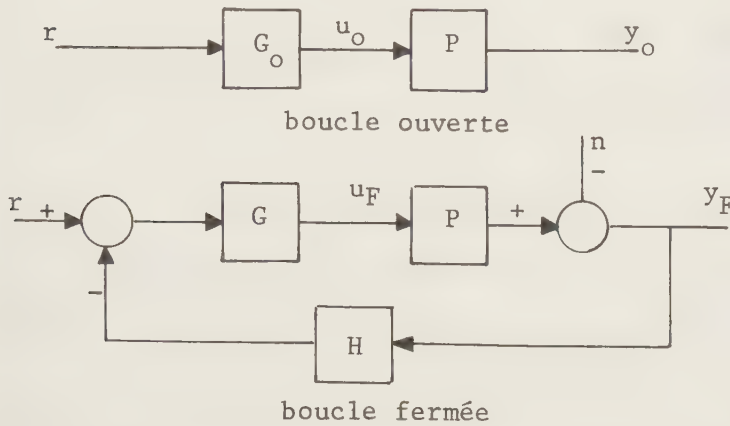
Il est donc possible en ajustant β de régler la sensibilité de la boucle de régulation aux fluctuations du processus à réguler. Le même raisonnement est évidemment valable vis-à-vis des perturbations.

Il serait fort précieux de disposer de résultats aussi simples pour les systèmes dynamiques multivariables et d'une méthode de synthèse assurant la diminution de la sensibilité.

En reprenant un résultat de PERKINS et CRUZ -4- sur la sensibi-

lité des systèmes décrits par des opérateurs linéaires, nous montrons, nous référant à KALMAN -2-, que les systèmes linéaires optimaux possèdent le caractère de faible sensibilité aux perturbations et aux variations de paramètres.

Pour cela considérons un processus défini par l'opérateur P et commandé successivement en boucle ouverte et en boucle fermée. Si le processus est défini par $\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + \underline{b} u$ et $y = \underline{c} \underline{x}$, P est égal à $\int_0^t \underline{\phi}(t-\tau) B(\tau) (.) d\tau$ ($\underline{\phi}(t-\tau)$ = matrice de transition).



G et H sont aussi des opérateurs linéaires

Fig. (2)

Les sorties s'expriment selon

$$y_O = P G_O r = T_O r$$

$$y_F = (I + P G H)^{-1} P G r = T_F r$$

Supposant des variations des paramètres du processus, on pose

$$\hat{P} = P + \delta P, \hat{y}_O = \hat{P} G r, \hat{y}_F = (I + \hat{P} G H)^{-1} \hat{P} G r,$$

$$e_O = y_O - \hat{y}_O \quad e_F = y_F - \hat{y}_F$$

On peut alors calculer, pour comparaison, e_F et e_O dans le cas où $y_O = y_F$.

$$\text{Tous calculs faits } e_F = (I + \hat{P} G H)^{-1} e_O = S e_O$$

A l'évidence, la sensibilité de la sortie du système en boucle fermée sera plus faible que celle en boucle ouverte si $\|e_F\| \leq a \|e_O\|$ avec $0 < a < 1$ (1).

Dans un espace de HILBERT (l'espace des physiciens) :

$$\|e_F\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{e}_F^T(t) \underline{e}_F(t) dt \quad \text{en supposant } \underline{e}_F(t < 0) = 0$$

Soit d'après le théorème de PARSEVAL

$$||e_F||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_F(j\omega)|^2 d\omega$$

(1) s'écrit donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |E_F(j\omega)|^2 - a^2 |E_0(j\omega)|^2 \right\} d\omega < 0$$

Dans le cas unidimensionnel, ceci donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (|S(j\omega)|^2 - a^2) |E_0(j\omega)|^2 d\omega < 0$$

qui est satisfaite si $|S(j\omega)| < 1$, quel que soit ω

soit si $|1 + \hat{P}(j\omega) G(j\omega) H(j\omega)| > 1$, quel que soit ω

C'est précisément une des caractéristiques des systèmes optimaux démontrée par KALMAN -2-, et connue sous le terme de "critère du cercle", du fait que la fonction de transfert en boucle ouverte (usuellement appelée $K G$) d'un système "quadratiquement optimal" se trouve dans le plan de NYQUIST à l'extérieur du cercle unité de centre -1.

Un système de commande optimal, selon les critères quadratiques, est donc assurément désensibilisant et la sensibilité de la sortie aux variations des paramètres est ajustable au moyen des coefficients du critère (matrices L et R).

Il est important de remarquer que sur la figure (2) on a $y_F = S n(t)$, ce qui signifie que les systèmes linéaires optimaux sont aussi "ε invariant" (cf. chapitre I § 2), c'est-à-dire peu sensibles aux perturbations.

Le moment est maintenant venu d'établir le bilan de la régulation quadratique :

L'emploi d'un critère quadratique de régulation où les matrices L et R sont choisies définies positives, et où apparaissent les dérivées premières des commandes, permet (en étant en outre assuré de la stabilité asymptotique du processus régulé) par ajustement de L et R :

1) de se fixer à priori des écarts maximaux sur les différentes sorties.

2) de tenir compte du vieillissement du processus.

3) de diminuer à volonté la sensibilité des sorties aux variations des paramètres.

4) de rendre le système invariant, c'est-à-dire insensible aux perturbations.

Il est d'autre part attrayant et convaincant de remarquer que la structure théorique de commande est celle à laquelle l'utilisateur est habitué : PID, anticipation, tendances.

C - RECONSTRUCTION DES ETATS -

1 - Définition

Le terme "reconstruction" appartient bien entendu au vocabulaire de KALMAN -5- qui fait une distinction, tout à fait justifiée pour les systèmes généraux, entre l' "observabilité" et la "reconstructibilité" des états.

Le problème de l'observation concerne la détermination de l'état présent $x(t)$ à partir des informations futures provenant des mesures $(y(\tau), \tau \geq t)$, tandis que le problème de la reconstruction est relatif au même état présent $x(t)$ qui doit être obtenu à partir des informations passées $y(\tau) (\tau \leq t)$.

Dans l'optique de la commande en ligne, c'est bien le problème de la reconstruction qui est fondamental. Plus précisément le désir de l'automaticien est d'élaborer un "système" ou un algorithme séquentiel remettant à jour l'état du processus, à mesure que de nouvelles informations arrivent.

Ceci étant précisé, exprimons-nous de constater que pour les systèmes linéaires stationnaires, les deux notions d' "observabilité" et de "reconstructibilité" sont équivalentes.

Ainsi, un système linéaire stationnaire de dimension n ($\dot{x} = A x + B u$ $y = C x$) sera "à état reconstructible" si et seulement si le rang de la matrice d'observabilité est égal à n -5-. Soit :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} = n$$

Dans ces conditions, il n'est pas abusif d'appeler observateur tout système reconstruisant le vecteur d'état à partir des informations provenant du processus. Ce vecteur d'état observé n'a évidemment aucune raison d'être identique au vecteur d'état des équations du processus et il convient de l'en distinguer à l'aide de la notation $\hat{x}$.

Il est intéressant de montrer qu'ainsi qu'il advient souvent en pareil cas le sens physique de l'ingénieur a permis d'élaborer différents types d'observateurs dont le plus complexe et par conséquent le plus onéreux possède une structure optimale au sens de la minimisation d'une distance $d[x(t), \hat{x}(t)]$. On distinguera ci-après les systèmes statiques et les systèmes dynamiques ; parmi ces derniers, on étudiera successivement les observateurs de LUENBERGER et les estimateurs de KALMAN-BUCY.

2 - Les systèmes statiques

Si la matrice d'observation C est carrée, non singulière, et en l'absence d'un niveau de bruit important sur les mesures, l'état observé est fourni par $\hat{x} = C^{-1}y$

Ce cas idéal est évidemment peu courant : généralement la dimension du vecteur d'état (n) est supérieure à celle du vecteur de sortie (m). Il est alors possible d'avoir recours à la pseudo inverse -8-.

A défaut de chercher la solution de $y = Cx$, il est possible de vérifier que le vecteur x_0 , donné par $x_0 = C^T (C C^T)^{-1} y = C^+ y$, est la solution de norme minimale. C^+ est appelée pseudo inverse droite (car $C C^+ = I$) et n'existe que si $\text{rang } C \geq m$.

Si, en revanche, le nombre de mesures est supérieur au nombre d'états, il n'y a pas de solution exacte à l'équation $y = Cx$ mais un x_0 qui minimise $\|y - Cx\|$ (méthode des moindres carrés) et qui est donné par $x_0 = C^+ y = (C^T C)^{-1} C^T y$.

C^+ est tel que $C^+ C = I$, est appelé pseudo inverse gauche et n'existe que si $\text{rang } C \geq n$.

En conclusion, ces systèmes statiques sont, par leur simplicité, très prisés par l'ingénieur mais doivent être utilisés avec circonspection. En effet, avec ce genre d'observateurs, le bouclage complet s'effectue en fait sur les sorties, ce qui ne garantit nullement la stabilité du système global. Lorsque cela est possible, on pourra cependant faire en sorte que les capteurs soient placés de façon à fournir une bonne image des dynamiques du processus. Théoriquement, cela revient à placer les capteurs de telle sorte que le vecteur de mesure obtenu soit le vecteur d'état du modèle.

3 - Généralités pratiques sur les systèmes dynamiques

En premier lieu, il n'est sans doute pas inutile de remarquer que les régulations classiques, dans lesquelles apparaissent des correcteurs formés de dérivateurs d'ordre élevé (régulateur en $P D D^2 D^3$), recèlent la notion d'observateur, puisque les états sont toujours des combinaisons linéaires des dérivées successives des mesures. Il est bien connu que cette méthode engendre d'excellentes performances en simulation mais devient pratiquement inapplicable en présence de mesures bruitées.

Au lieu de reconstruire l'état à partir de l'effet qu'il produit (les sorties), il est possible d'en utiliser les causes c'est-à-dire les commandes et les perturbations. En effet, si celles-ci sont mesurables, l'emploi d'un modèle en parallèle avec le processus permet de retrouver les états sur les intégrateurs du modèle. L'intérêt de la méthode est lié à la "mesurabilité" des perturbations et à la précision de la connaissance des conditions initiales sur l'état. Pratiquement, ce type d'observateur s'avère suffisant si le modèle inspire la confiance, qui, dans la méthode précédente, était accordée aux mesures.

Il est maintenant évident qu'une synthèse des deux procédés, un compromis utilisant les causes et les effets, fournira une méthode très améliorée dans l'esprit de l'automatique, puisque le modèle du processus sera en quelque sorte mis à jour à l'aide d'informations introduites en contre réaction, qui augmenteront la précision et diminueront les temps de réponse.

La structure d'un tel système comprend d'une part un modèle piloté par les commandes et les perturbations mesurables du processus, d'autre part un terme correctif proportionnel à l'écart (e) entre la sortie du modèle ($\hat{y}$) et celle du processus (y). Eventuellement, un terme dérivateur peut améliorer cette correction - figure 3.

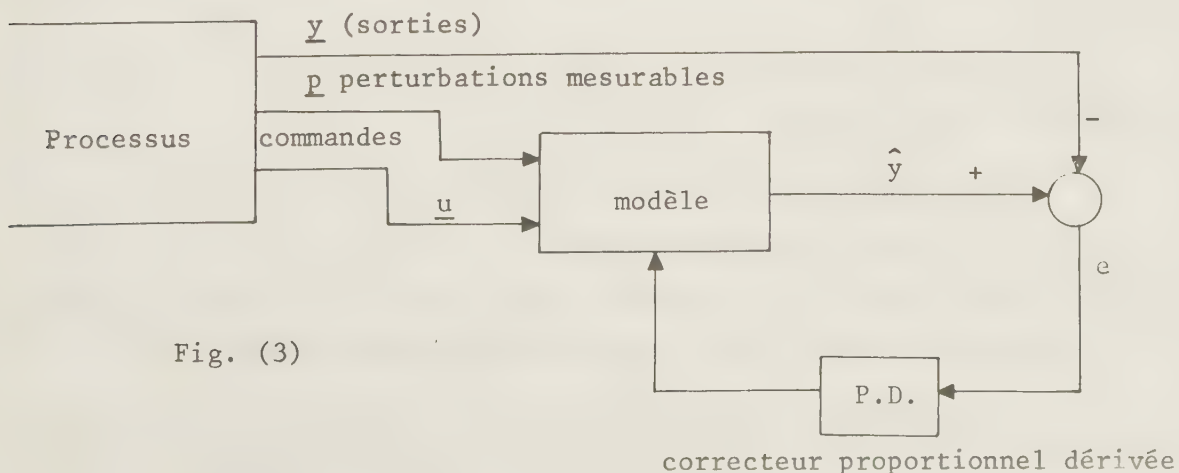


Fig. (3)

Ce schéma n'est pas sans rappeler la méthode d'identification dite "du modèle", où un paramètre (a) du modèle est modifié selon la loi $\dot{a} = -k e$. L'état joue ici le rôle du paramètre et l'intégrateur de commande existe naturellement dans les équations du modèle. La structure définitive est donc celle de la figure 4 pour un processus décrit par

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{u} + D \underline{p} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned}$$

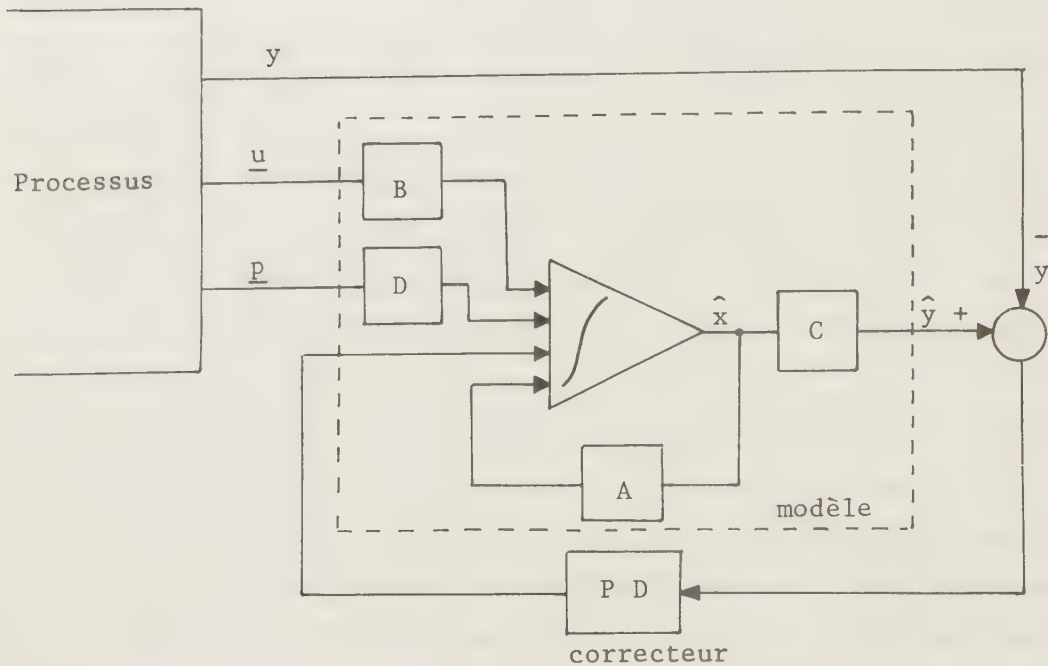


Fig. (4)

Il est utile de noter que la "composante dérivée" du correcteur peut généralement être élaborée en utilisant le modèle lui-même ce qui permet d'éviter l'emploi de dérivateurs.

Une fois la structure de l'observateur établie, il est nécessaire de déterminer le correcteur.

Pour cela, deux points de vue peuvent être distingués :

1) un point de vue purement déterministe où le gain du correcteur (proportionnel simple) est considéré comme le moyen de fixer les dynamiques de l'observateur. (Théorie des observateurs de LUENBERGER -6-).

2) un point de vue statistique, où le correcteur est fonction des bruits d'équations, c'est-à-dire des imprécisions des équations et des bruits de mesure ou de la "crédibilité" de cette mesure. (Théorie des estima-

teurs de KALMAN-BUCY).

On peut déjà imaginer que le terme "dérivé" du correcteur n'interviendra que si la dérivée de la mesure possède une signification. Autrement dit, la mesure devra pouvoir être prédite, qu'elle soit entachée d'un bruit négligeable ou que ce bruit soit "coloré". En revanche, si le bruit de mesure est blanc, un "proportionnel" sera suffisant.

C'est la remarquable supériorité de la théorie statistique de fournir à la fois la structure et les coefficients à ajuster, en tenant compte ainsi de toutes les informations disponibles sur le processus. Le problème pratique est de savoir si l'on possède ces informations et si le prix payé pour leur utilisation est justifié.

4 - Les observateurs de LUENBERGER

Le but recherché est de reconstruire les états ($\underline{x}$), ou une combinaison linéaire ($\underline{z}$) des états, à partir des mesures ($\underline{y}$) effectuées sur un processus décrit par :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \quad (1)$$

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} \quad (2)$$

Conformément au développement ci-dessus, la structure de l'observateur est choisie de la forme :

$$\dot{\underline{z}} = \underline{D} \underline{z} + \underline{L} \underline{y} + \underline{N} \underline{u} \quad (3)$$

Sous quelles conditions ce système dynamique est-il un observateur ? autrement dit, quand avons nous $\underline{z} = \underline{T} \underline{x}$ (*)

Compte tenu de l'équation de mesure (2)

(1) peut s'écrire :

$$\dot{\underline{z}} = \underline{D} \underline{z} + \underline{L} \underline{C} \underline{x} + \underline{N} \underline{u} = \underline{D} \underline{z} + \underline{M} \underline{x} + \underline{N} \underline{u} \quad (4)$$

En faisant apparaître $\underline{T} \underline{x}$ ($\underline{z} = \underline{T} \underline{x}$) dans (1) et (4), on obtient respectivement (5) et (6)

$$\underline{T} \dot{\underline{x}} = \underline{T} \underline{A} \underline{x} + \underline{T} \underline{B} \underline{u} \quad (5)$$

$$\underline{T} \dot{\underline{x}} = (\underline{D} \underline{T} + \underline{M}) \underline{x} + \underline{N} \underline{u} \quad (6)$$

Donc (1) et (3) sont reliés par $\underline{z} = \underline{T} \underline{x}$ si :

$$\underline{D} \underline{T} + \underline{M} = \underline{T} \underline{A} \quad (7)$$

$$\text{et } \underline{N} = \underline{T} \underline{B} \quad (8)$$

et la solution de (3) est fournie par :

$$\underline{z} = \underline{T} \underline{x} + e^{\underline{D}t} [\underline{z}(0) - \underline{T} \underline{x}(0)]$$

* Dans cette méthode le terme "observateur" est pris au sens large : si $\underline{T} = \underline{I}$, l'état sera observé; si $\underline{T} \neq \underline{I}$, une combinaison linéaire des états sera observée.

Ainsi, D constitue les dynamiques de l'observateur que l'on peut choisir arbitrairement. Généralement D est pris diagonale de termes supérieurs (en valeur absolue) aux valeurs propres du système (1). Il est aussi possible de convertir ce système (1) en une forme canonique.

En effet, tout système, à une commande et une sortie, commandable et observable, peut se mettre sous la forme d'une matrice A compagnon, soit :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & & & \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_n & 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \underline{b} u \quad y = x_1 \quad (9)$$

Pour observer tous les états, on fait $T = I$ et, (7) devient :

$$A - D = M$$

avec M de la forme $\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ puisque seul x_1 est mesuré

Dans ces conditions, D est imposée :

$$D = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{n-1} & 0 & & & 1 \\ -\beta_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

où les β_i sont arbitrairement fixés.

Finalement, les termes de mesure sont : $m_i = \beta_i - \alpha_i \quad i=1, \dots, n$

Une remarque évidente s'impose : pourquoi observer x_1 alors qu'il est mesuré ?

Il peut être effectivement vérifié que le système (9) est servable par :

$$\dot{\underline{z}} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \underline{z} + \begin{bmatrix} \beta_1(\alpha_1 - \beta_1) + (\beta_2 - \alpha_2) \\ \beta_2(\alpha_1 - \beta_1) + (\beta_3 - \alpha_3) \\ \vdots \\ \beta_{n-1}(\alpha_1 - \beta_1) - \alpha_n \end{bmatrix} y + T \underline{b} u$$

où $\underline{z}$ est de dimension $n - 1$

avec $T = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{n-1} & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$

Les états sont donc donnés par $x_n = z_{k-1} + B_{k-1} y$ $1 < k \leq n$ et, seuls, $n-1$ coefficients (les β_i) sont à fixer.

Ce résultat est utilisé comme référence pour montrer qu'un processus multivariable, commandable et observable, peut être observé à l'aide d'un système d'ordre $n-m$ ($m = \dim y$).

En effet, par une matrice de changement de base, dont les n vecteurs linéairement indépendants, sont puisés dans la matrice d'observabilité, un nouveau vecteur d'état est défini qui se décompose en sous systèmes d'ordre n_i ($\sum n_i = n$) et de structure identique à celui précédemment étudié (matrice compagnon du cas monovariable). Notamment, la première composante de chacun des vecteurs d'état élémentaires est une mesure puisque combinaison linéaire des composantes de y . D'autre part, le couplage entre les sous systèmes ne s'effectue que par des combinaisons linéaires des mesures (ce problème est le dual de celui traité dans l'appendice du chapitre 1, auquel on se référera).

Ainsi, la stratégie du cas monovariable est applicable pour chaque sous système et fournit globalement un observateur d'ordre $n-m$.

5 - Application de la théorie de l'estimation - Les estimateurs de KALMAN-BUCY

5-1 La théorie de l'estimation :

Cette théorie concerne le problème suivant :

Etant donné une variable aléatoire x et des observations

y_t ($t \in T$, $T \subseteq \mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$), on désire obtenir l'estimation sans biais (cad $E(\hat{x}) = E(x)$) de $x(\hat{x})$, de variance $E \left\{ (\hat{x} - x)^2 \right\}$ minimale.

Ainsi, en automatique, on cherchera, par exemple, l'estimation $\hat{x}$ pour un processus d'équation $\dot{x} = a x + w$, dont on mesure $y : y = c x$ (w et v sont des bruits).

5-1-1 Le principe d'orthogonalité

Calculons $E(x - x_0)^2 = E(x - \hat{x} + \hat{x} - x_0)^2$ (x_0 est un quelconque candidat admissible - sans biais - à l'estimation) dans le but d'établir une relation en $\hat{x}$.

$$E(x - \hat{x} + \hat{x} - x_0)^2 = E(x - \hat{x})^2 + E(\hat{x} - x_0)^2 + 2 E[(x - \hat{x})(\hat{x} - x_0)]$$

il est visible que si $E[(x - \hat{x})(\hat{x} - x_0)] = 0$ (principe d'orthogonalité)

$$E(x - x_0)^2 \geq E(x - \hat{x})^2 \quad \forall x_0 \quad (\text{variance minimale})$$

Explicitant le principe d'orthogonalité :

$$E[(x-\hat{x}) (\hat{x}-x_0)] = E[(x-\hat{x}) f(y_t, t \in T)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\hat{x}) f(y_t) p(x, y_t) dx dy_t$$

$\hat{x}, x_0$ = estimation

$p(x, y_t)$ = densité de probabilité de

x et $y_t = p_1(y_t) p_2(x/y_t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(y_t) f(y_t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x/y_t) (x-\hat{x}) dx \right] dy_t$$

qui est nul si $\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x/y_t) (x-\hat{x}) dx = 0$ soit $\hat{x}(y_t) = E(x/y_t)$

5-1-2 Estimation linéaire

Si, de plus, $\underline{x}$ et $\underline{y}$ (maintenant des vecteurs) sont de valeurs moyennes nulles et si $p(x, y)$ est gaussienne, le calcul montre que la fonction $\hat{x}(y_t)$ est linéaire en y_t .

$$\hat{\underline{x}} = \mathcal{L}(\underline{y}_t)$$

Par exemple si $T \subset N$

$$\underline{y}_t = (y_{11} \ y_{12} \dots y_{1n} \ y_{21} \dots y_{2n} \dots y_{mn}) = \underline{y}^T$$

$$\hat{\underline{x}} = L \underline{y}$$

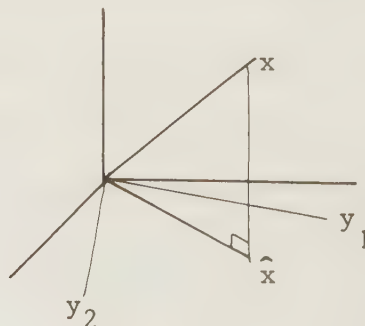
L = matrice

$$\text{si } T = [t_1, t_2] \quad \hat{\underline{x}}(t) = \int_{t_1}^{t_2} w(t, \tau) \underline{y}(\tau) d\tau \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Cette classe d'estimateurs linéaires permet une visualisation du principe d'orthogonalité :

$$\text{en effet } E[(x-\hat{x}) (\hat{x}-x_0)] = E[(x-\hat{x}) \mathcal{L}(\underline{y}_t)] = \mathcal{L}(E[(x-\hat{x}) \underline{y}_t])$$

qui est nul si $E[(x-\hat{x}) \underline{y}_t] = 0$, c'est-à-dire si l'erreur d'estimation est orthogonale aux mesures, ce qui est évident sur la figure où on a supposé 2 mesures y_1 et y_2 ($\hat{x}$, qui doit se trouver dans le plan (y_1, y_2) engendre une amplitude d'erreur minimale si $x-\hat{x}$ est perpendiculaire à ce plan).



5-1-3 Equation de WIENER HOPF

Reprenons, pour simplifier le formalisme, une seule variable x et un intervalle de mesure $T : T = [t_1, t_2]$.

Pour un processus gaussien $\hat{x}(t) = \int_{t_1}^{t_2} w(t, \tau) y(\tau) d\tau$

et le principe d'orthogonalité $E[(x - \hat{x}) y(t)] = 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned} E(x(t) y(\tau)) &= E\left[\int_{t_1}^{t_2} w(t, \theta) y(\theta) d\theta y(\tau)\right] \\ &= E\int_{t_1}^{t_2} w(t, \theta) E[y(\theta) y(\tau)] d\theta \end{aligned}$$

soit, en utilisant les notations habituelles pour les fonctions d'inter corrélation :

$$\phi_{xy}(t, \tau) = \int_{t_1}^{t_2} w(t, \theta) \phi_{yy}(\theta, \tau) d\theta \quad t_1 \leq \tau \leq t_2 \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

équation de Wiener Hopf

Du point de vue de l'utilisateur, il reste à effectuer le plus difficile : inverser cette équation intégrale pour obtenir $w(t, \tau)$.

Wiener proposa une solution, employant la transformée de Fourier, dans le cas particulier de processus stationnaires et avec $[t_1, t_2] = [-\infty, t]$, permettant ainsi aux transitoires d'avoir disparu (d'où l'équation de Wiener : $\phi_{xy}(t-\tau) = \int_{-\infty}^t w(t-\theta) \phi_{yy}(\theta-\tau) d\theta$). On peut à ce stade effectuer un rapprochement avec la théorie classique de la régulation où l'utilisation de transformées, peu adaptée à l'usage d'un ordinateur, permet difficilement de traiter les systèmes multivariables.

D'autre part, au même titre que le gain non stationnaire d'un optimaliseur quadratique est calculé séquentiellement (matrices de Riccati), il est souhaitable d'obtenir ici un estimateur séquentiel plutôt que de tenter d'explicitier $w(t, \tau)$.

Sans doute, est-ce cette dernière remarque qui est à la base du filtre de Kalman-Bucy.

5-2 Estimateur de Kalman-Bucy :

Nous revenons maintenant au problème de la reconstruction des états, ce qui implique que le processus stochastique à considérer soit de la forme :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} + \underline{w}$$

où $\underline{w}$ et $\underline{v}$ sont des bruits

$$\underline{y} = \underline{C} \underline{x} + \underline{v}$$

qui peuvent être dus à des perturbations aléatoires effectives mais aussi figurer respectivement les erreurs de modèle et les imprécisions de mesure.

Pratiquement, plusieurs cas sont donc possibles :

- 1) $\underline{v}$ et $\underline{w}$ sont des bruits blancs
- 2) $\underline{w}$ est blanc, $\underline{v}$ coloré
- 3) Certaines composantes de $\underline{v}$ sont nulles : autrement dit, certaines mesures sont parfaites (non bruitées).

Les résultats sont donnés ici, sans démonstration, pour ces trois possibilités ainsi que pour le cas général les englobant. Pour rester dans l'esprit de ce chapitre, les démonstrations devraient être conformes à l'idée suivante : on sait que la solution $\hat{\underline{x}}$ est une fonction linéaire du vecteur de sortie $[\hat{\underline{x}}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{w}(t, \tau) \underline{y}(\tau) d\tau + K(t) \underline{y}(t)]$ et qu'elle satisfait l'équation de Wiener Hopf. D'autre part, la solution cherchée (Kalman) doit être donnée sous forme d'algorithme, c'est-à-dire ici, sous forme d'équation différentielle. On dérivera donc l'équation (1) et l'équation de Wiener Hopf ; ce sera alors une affaire de calculs d'obtenir les conditions de compatibilité entre les deux. Une autre démonstration employant la conversion du cas discret au cas continu est plus fréquente et peut être trouvée par exemple dans BRYSON -9- et TAKAHASHI -8-

5-2-1 $\underline{v}$ et $\underline{w}$ sont des bruits blancs

Hypothèse $\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + \underline{w}$
 $\underline{y} = C \underline{x} + \underline{v}$

$$E(\underline{w}(t)) = E(\underline{v}(t)) = E(\underline{x}(t_0)) = 0 \quad E \left[\begin{bmatrix} \underline{w}(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}^T(\tau') & \underline{v}^T(\tau') \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} W(t) & T^T(t) \\ T(t) & V(t) \end{bmatrix} \delta(t-\tau')$$

$$E(\underline{x}(t_0) \underline{x}^T(t_0)) = P_0$$

$$E(\underline{x}(t_0) \underline{v}^T(t)) = E(\underline{x}(t_0) \underline{w}^T(t)) = 0$$

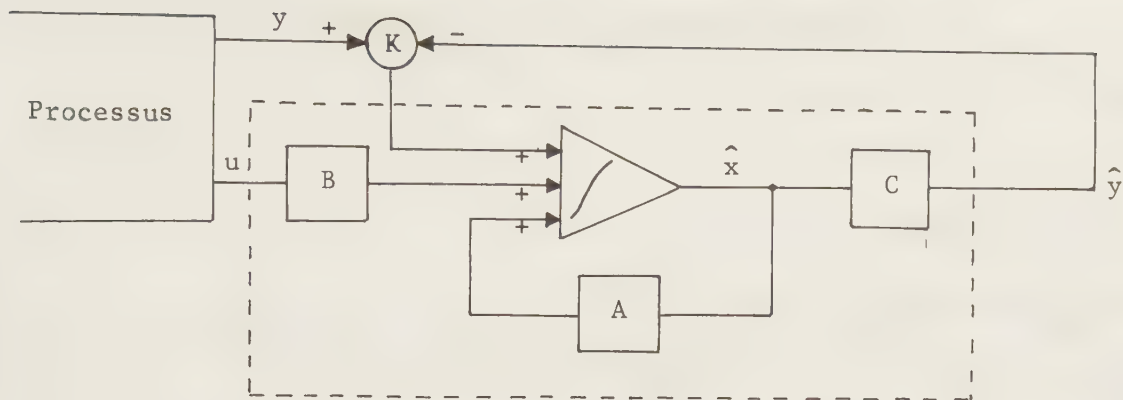
Estimateur $\dot{\hat{\underline{x}}} = A \hat{\underline{x}} + B \underline{u} + K(\underline{y} - C \hat{\underline{x}}) \quad \hat{\underline{x}}(t_0) = 0$

$$K = [P C^T + T^T] V^{-1}$$

$$\dot{P} = A P + P A^T - K V K^T + W \quad P(t_0) = P_0$$

Pour le problème de Wiener $t_0 = -\infty$ et $\dot{P} = 0$ donc $K = \text{cte}$

En se référant au § C.3, on constate qu'une simple correction proportionnelle est ici optimale.



Remarque : on a $\hat{x} = x + e^{(A-KC)t}(\hat{x}_0 - x_0)$; $A-KC$ joue le rôle de la matrice D des observateurs de Luenberger et est déterminé par les niveaux de bruits.

5-2-2 Bruit coloré sur la mesure

Hypothèses $\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + \underline{w}$

$$\dot{\underline{z}} = A_2 \underline{z} + \underline{w}_2$$

$$\underline{y} = C \underline{x} + C_2 \underline{z}$$

$\underline{w}, \underline{w}_2$ bruits blancs

$\underline{z}$ bruit coloré

$$E(\underline{w}(t)) = E(\underline{w}_2(t)) = E(\underline{x}(t_0)) = E(\underline{z}(t_0)) = 0 \quad E \begin{bmatrix} \underline{w}(t) \\ \underline{w}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}^T(\tau) & \underline{w}_2^T(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(t) & W_{12}^T \\ W_{12} & W_2(t) \end{bmatrix} \delta(t-\tau)$$

$$E(\underline{x}(t_0) \underline{x}^T(t_0)) = P_0$$

$$E(\underline{x}(t_0) \underline{w}^T(t)) = E(\underline{x}(t_0) \underline{w}_2^T(t)) = E(\underline{z}(t_0) \underline{w}^T(t)) = 0$$

Estimateur

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A \hat{\underline{x}} + K_2 (\dot{\underline{y}} - D_2 \underline{y} - M_2 \hat{\underline{x}} - C B \underline{u}) + B \underline{u}$$

$$K_2 = (P M_2^T + W C^T + W_{12} C_2^T) V_0^{-1} \quad D_2 = (\dot{C}_2 + C_2 A_2) C_2^{-1} \quad M_2 = \dot{C} + C A - D$$

$$\dot{P} = A P + P A^T - K_2 V_0 K_2^T + W \quad V_0 = C W C^T + C_2 W_2 C_2^T + C W_{12} C_2^T + C_2 W_{12}^T C$$

$$P(t_0) = P_0$$

Pour le problème de Wiener, l'équation du filtre

devient :

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A \hat{\underline{x}} + B \underline{u} + K_2 (\dot{\underline{y}} - C(A \hat{\underline{x}} + B \underline{u})) - K_2 D_2 (\underline{y} - C \hat{\underline{x}})$$

où l'on a fait apparaître le terme correctif proportionnel dérivée.

La dérivée de $\underline{y}$ peut aisément être évitée en écrivant

$$(\dot{\hat{\underline{x}}} - K_2 \dot{\underline{y}}) = A \hat{\underline{x}} + B \underline{u} - K_2 C(A \hat{\underline{x}} + B \underline{u}) - K_2 D_2 (\underline{y} - C \hat{\underline{x}})$$

5-2-3 Certaines mesures sont non bruitées

Hypothèses $\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + \underline{w}$

$$\underline{y}_1 = C_1 \underline{x} + \underline{v}_1$$

$$\underline{y}_2 = C_2 \underline{x}$$

$$E(\underline{w}(t)) = E(\underline{v}_1(t)) = E(\underline{x}(t_0)) = 0$$

$$E(\underline{x}(t_0) \underline{x}^T(t_0)) = P_0$$

$$E(\underline{x}(t_0) \underline{v}_1^T(t)) = E(\underline{x}(t_0) \underline{w}^T(t)) = 0$$

$$E \left[\begin{bmatrix} \underline{w}(t) \\ \underline{v}_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}^T(\tau) & \underline{v}_1^T(\tau) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} W(t) & 0 \\ 0 & V_1(t) \end{bmatrix} \delta(t-\tau)$$

Estimateur

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A \underline{x} + B \underline{u} + K_1 (\underline{y} - C_1 \hat{\underline{x}}) + K_2 (\dot{\underline{y}}_2 - (\dot{C}_2 + C_2 A) \underline{x} - C_2 B \underline{u})$$

$$K_1 = P C_1^T V_1^{-1} \quad K_2 = (P M_2^T + W C_2^T) (C_2 W C_2^T)^{-1} \quad M_2 = \dot{C}_2 + C_2 A$$

$$\dot{P} = A P + P A^T - K_1 V_1 K_1^T - K_2 C_2 W C_2^T K_2^T + W \quad P(t_0) = P_0$$

Cette fois, il apparait une correction proportionnelle pour les mesures bruitées et une correction dérivée pour les mesures non bruitées.

5-2-4 Cas général

Hypothèses

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \underline{v}$$

$$E(\underline{w}_1(t)) = E(\underline{w}_2(t)) = E(\underline{v}(t)) = E(\underline{x}(t_0)) = E(\underline{z}(t_0)) = 0$$

$$E(\underline{x}(t_0) \underline{x}^T(t_0)) = P_0$$

$$E(\underline{x}(t_0) \underline{w}_1(t)) = E(\underline{x}(t_0) \underline{w}_2(t)) = E(\underline{x}(t_0) \underline{v}(t)) = 0$$

$$E \left[\begin{bmatrix} \underline{w}_1(t) \\ \underline{w}_2(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T(\tau) & \underline{w}_2^T(\tau) & \underline{v}^T(\tau) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} W_{11}(t) & W_{12}(t) & T_1^T(t) \\ W_{12}(t) & W_{22}(t) & T_2^T(t) \\ T_1(t) & T_2(t) & V(t) \end{bmatrix} \delta(t-\tau)$$

Estimateur

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & (A_{11} - A_{12} C_{22}^{-1} C_{21}) \hat{x} + (A_{12} - K_1 C_{12}) C_{22}^{-1} y_2 + K_1 (y_1 - C_o \hat{x}) \\ & + K_2 (\dot{y}_2 - D_2 y_2 - M_2 \hat{x}) \end{aligned}$$

$$\hat{z} = C_{22}^{-1} (y_2 - C_{21} \hat{x})$$

$$[K_1 \ ; \ K_2] = [P \ C_o^T + T_1^T \ ; \ P \ M_2^T + T_3^T] \begin{bmatrix} V & & T_o \\ & - & - \\ T_o^T & & V_o \end{bmatrix}^{-1}$$

$$V_o = C_{21} W_{11} C_{21}^T + C_{22} W_{22} C_{22}^T + C_{21} W_{12} C_{22}^T + C_{22} W_{12}^T C_{21}$$

$$D_2 = (\dot{C}_{22} + C_{21} A_{12} + C_{22} A_{22}) C_{22}^{-1}$$

$$M_2 = (\dot{C}_{21} + C_{21} A_{11} + C_{22} A_{21} - D_2 C_{21})$$

$$C_o = C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21}$$

$$T_o = T_1 C_{21}^T + T_2 C_{22}^T$$

$$T_3 = C_{21} W_{11}^T + C_{22} W_{12}^T$$

$$\dot{P} = (A_{11} - A_{12} C_{22}^{-1} C_{21}) P + P(A_{11} - A_{12} C_{22}^{-1} C_{21})^T + W_{11} - [K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} V & T_o \\ T_o^T & V_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1^T \\ K_2^T \end{bmatrix}$$

$$P(t_o) = P_o$$

D - CONCLUSION -

La régulation des systèmes linéaires par minimalisation d'un critère quadratique s'avère une excellente méthode multivariable, puisque à condition de prendre un critère possédant des matrices définies positives et d'y introduire la dérivée première de l'énergie de commande, l'utilisateur est assuré de la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, ainsi que d'une certaine insensibilité de la sortie aux paramètres et aux perturbations.

De plus, les performances souhaitées sont obtenues par simple ajustement des coefficients diagonaux des matrices du critère, et, c'est la seule méthode de régulation où le vieillissement du processus et de ses organes réglants peut être pris simplement et directement en considération.

L'une des difficultés d'application de la régulation optimale réside dans la reconstruction du vecteur d'état à partir des mesures effectuées sur le processus. C'est d'ailleurs un problème commun à toutes les méthodes de l'espace d'état et même à la régulation classique, où les dérivateurs élaborent indirectement des états.

A ce sujet, les deux points de vue théoriques principaux ont été développés dans ce chapitre : les observateurs déterministes de Luenberger et les estimateurs stochastiques de Kalman-Bucy. La mise en oeuvre, dans les deux cas, requiert, cependant, un matériel important, et il est pratiquement souhaitable d'en simplifier le plus possible la structure, et même d'utiliser des réseaux statiques tels que la pseudo-inverse lorsque la stabilité est assurée.

Les deux théories n'en constituent pas moins un excellent point de départ pour l'étude d'une régulation et ceci d'autant plus que la mise en cascade d'un observateur ou d'un estimateur avec le contrôleur optimal conserve l'optimalité du processus bouclé.

En effet, d'une part REKASIUS -12- et PEARSON -13- ont montré qu'un observateur d'ordre p est obtenu en minimisant un critère quadratique où apparaissent les p premières dérivées de la commande. La détermination arbitraire des coefficients du critère remplace alors celle des dynamiques de l'observateur de Luenberger. D'autre part, J.T. TOU (1961) a montré que l'ensemble estimateur - contrôleur optimal constitue la solution d'un problème de commande optimale stochastique où les équations de mesure et d'état du processus sont assorties de bruits blancs gaussiens additifs et où le critère s'exprime par $E \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} (\underline{y}^T L \underline{y} + \underline{u}^T R \underline{u}) dt / \underline{y}(\tau) \right\}_{t_0 \leq \tau \leq t_0 + T}$. Ce résultat est connu sous le vocable du principe de séparation.

Cette dernière théorie présente un intérêt important car les termes aléatoires qu'elle traite peuvent aussi bien être considérés comme des perturbations réellement existantes que comme des erreurs d'équations. C'est ce point de vue qui a motivé l'essentiel de l'application sur unité pilote développée dans le chapitre III.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- R.E. KALMAN - "Contribution to the theory of optimal control"
Bol. Soc. Mat. Mexicana 1960 - pp 102-119
- 2- R.E. KALMAN - "When is a linear control system optimal"
Journal of basic Engineering
March 1964 - pp 51-60
- 3- J.F. LE CORRE - "Autoadaptation d'un système de régulation au moyen
Y. THOMAS d'un calculateur analogique"
Seminaire international sur l' "automatisation dans
la production et la distribution de l'énergie élec-
trique"
Bruxelles 18-22 IV 1966 - Proceedings
DUNOD - P.A.E. 1967 - pp 178-187
- 4- W.R. PERKINS - "Sensitivity operators for linear time varying systems"
and J.B. CRUZ Jr. Proceeding 1st symposium on sensitivity methods in
control theory - Dubrovnik 1964 -
Pergamon Press 1966 - pp 67-77
- 5- R.E. KALMAN - "Topics in mathematical system theory"
P.L. FALB Mc Graw-Hill 1969
M.A. ARBIB Chap. 2
- 6- D.G. LUENBERGER - "Observers for multivariable systems"
IEEE transactions - vol. AC 11 n°2
April 1966 - pp 190-197
- 7- P. NASLIN - "Théorie de la commande et conduite optimale"
DUNOD 1969 - pp 69-77
- 8- Y. TAKAHASHI et al- "Control" Addison Wesley 1970
- 9- A.E. BRYSON - "Applied optimal control"
Y.C. HO Blaisdell 1969
- 10- A.V. BALAKRISHNAN - "Communication theory"
Chapter 3 : "Filtering and prediction theory"
1968
- 11- A.E. BRYSON - "Linear filtering for time varying systems using
D.E. JOHANSEN measurements containing colored noise"
IEEE transactions - vol. AC 10 n°1
January 1965 - pp 4-10
- 12- J.D. FERGUSON - "Optimal linear control systems with incomplete state
Z.V. REKASIUS measurements"
IEEE transactions - vol. AC 14 n°2
April 1969 - pp 135-140
- 13- J.B. PEARSON - "Compensator design for multivariable linear systems"
C.Y. DING IEEE transactions - vol. AC 14 n°2
April 1969 - pp 130-134

Chapitre III

APPLICATION DU "PRINCIPE DE SEPARATION"

A LA COMMANDE OPTIMALE D'UN GENERATEUR DE VAPEUR

Après un exposé critique des méthodes de régulation multivariable de l'espace d'état (chapitre I) et un plaidoyer pour une régulation optimale quadratique (chapitre II), il reste à montrer que cette dernière peut aisément, et dès maintenant, donner lieu à des applications.

Notre choix, pour cela, s'est porté sur l'optimisation stochastique (principe de séparation) qui s'impose en présence des perturbations aléatoires et qui, surtout, prend naturellement en considération les imprécisions du modèle.

Cinq paragraphes décrivent les étapes successives qui mènent à la commande en ligne :

- un rappel sur le principe de séparation,
- la position du problème pratique, c'est-à-dire le cahier des charges de la régulation,
- la résolution en simulation,
- la résolution des difficultés de "mise en ligne" dues aux erreurs de modèle,
- des résultats expérimentaux.

1 - LE "PRINCIPE DE SEPARATION" -

Succinctement, le "principe de séparation" permet de constituer une régulation à caractère optimal par mise en cascade, dans la boucle de retour, d'un estimateur et d'un optimiseur déterministe recevant les états estimés.

En voici la formulation continue :

soit un processus à commander d'équations d'état :

$$\dot{\underline{x}} = A(t) \underline{x} + B(t) \underline{u} + \underline{d}(t) + \underline{w}(t) \quad (1)$$

et muni de mesures $\underline{y}$:

$$\underline{y}(\sigma) = C(\sigma) \underline{x}(\sigma) + \underline{f}(\sigma) + \underline{v}(\sigma) \quad t_0 \leq \sigma \leq t \quad (2)$$

Précisions :

- $\underline{d}(t)$ et $\underline{f}(t)$ sont des termes purement déterministes sur $[t_0, t_0 + T]$

- $\underline{w}(t)$ et $\underline{v}(t)$ sont des termes purement aléatoires : il s'agit de bruits blancs gaussiens tels que :

$$E \left[\begin{pmatrix} \underline{w}(t) \\ \underline{v}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{w}^T(\tau) & \underline{v}^T(\tau) \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \underline{W}(t) & \underline{N}^T(t) \\ \underline{N}(t) & \underline{V}(t) \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \quad (3)$$

$$E(\underline{w}(t)) = E(\underline{v}(t_0)) = E(\underline{x}(t_0)) = 0 \quad (4)$$

$$E[\underline{x}(t_0) \underline{v}^T(t)] = E[\underline{x}(t_0) \underline{w}^T(t)] = 0 \quad (5)$$

- Pour être réaliste, il serait bon d'adjoindre à $\underline{d}$, $\underline{w}$, $\underline{f}$ et $\underline{v}$ des termes totalement inconnus. C'est, en fait, ce que nous ferons au paragraphe 4.

$$- E[\underline{x}(t_0) \underline{x}^T(t_0)] = P_0$$

La commande $\underline{u}^*(t)$ qui minimise le critère de performance

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} (\underline{y}^T_L \underline{y} + \underline{u}^T_R \underline{u}) dt / y(\sigma) \right\}_{\sigma \in [t_0, t_0+T]} \quad (6)$$

L, R symétriques

R défini > 0

est donnée par :

$$\underline{u}^*(t) = - R^{-1} B^T(t) (K(t) \hat{\underline{x}}(t) + \underline{\phi}) \quad (7)$$

où $\hat{\underline{x}}$ est l'estimation de $\underline{x}$ au sens de Kalman (c'est-à-dire telle que $E[(\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T (\underline{x} - \hat{\underline{x}})]$ soit minimum).

Rappelons que $K(t)$ et $\phi(t)$ sont solution de

$$\dot{K} = -KA - A^T K - Q + K B R^{-1} B^T K \quad K(t_0 + T) = 0 \quad (8)$$

$$\dot{\phi} = -K \underline{d} + K B R^{-1} B^T \phi - C^T L \underline{f} - A^T \phi \quad \phi(t_0 + T) = 0 \quad (9)$$

et $\hat{\underline{x}}$ est fourni par :

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = A \hat{\underline{x}} + B \underline{u} + \underline{d} + \hat{K}(\underline{y} - C \hat{\underline{x}} - \underline{f}) \quad \hat{\underline{x}}(t_0) = 0 \quad (10)$$

avec $\hat{K} = (P C^T + N^T) V^{-1} \quad (11)$

et $\dot{P} = A P + P A^T - \hat{K} V \hat{K}^T + W \quad P(t_0) = P_0 \quad (12)$

Remarques :

1) Si la distribution des bruits blancs se présente différemment de celle des équations (1) et (2), on se reportera, pour l'établissement de l'estimation, au chapitre 2 § C.

2) La formulation continue a été préférée à la formulation discrète car la mise en oeuvre a été effectuée sur calculateur analogique. En effet, les utilisateurs étant, à l'heure actuelle, très familiarisés avec la technique

analogique, il nous a semblé préférable, dans une première phase, de ne donner qu'un rôle éventuel de coordinateur au calculateur digital.

3) Le problème dans son ensemble est ici non stationnaire, mais seule la version stationnaire sera utilisée par l'application. De plus, pour l'optimaliseur ou bien T sera ∞ , ou bien t_0 représentera le temps courant t (et donc K , et f resteront constants). Pour l'estimation, les bruits seront supposés stationnaires : dans ces conditions, la matrice $\hat{K}$ converge également vers une constante qui est la solution du problème de Wiener.

2 - POSITION DU PROBLEME DE REGULATION -

Conformément au développement en annexe, la régulation optimale du générateur de vapeur ne concerne que l'ensemble pression - température de surchauffe. Rappelons la description mathématique adoptée au § 2-2 de l'annexe. (les notations ont été ici homogénéisées de telle sorte que p_b , p_s et t_s représentent des écarts de régulation).

$$\dot{p}_b = a q_c + b q_d - b q_s \quad (13)$$

$$\dot{\theta} = c[-\theta + d(q_d - 40)] \quad (14)$$

$$\dot{t}_s = c[-t_s + f + g(q_c - 80) - h(q_s - 1000) - \theta] \quad (15)$$

$$p_s^* = p_b - l\left(\frac{q_s}{Q_s}\right)^2 \quad (16)$$

$$t_s^* = t_s \quad (17)$$

où p_b = écart en pression au ballon

p_s = écart en pression à l'admission de la turbine

t_s = écart en température de vapeur surchauffée à l'admission turbine

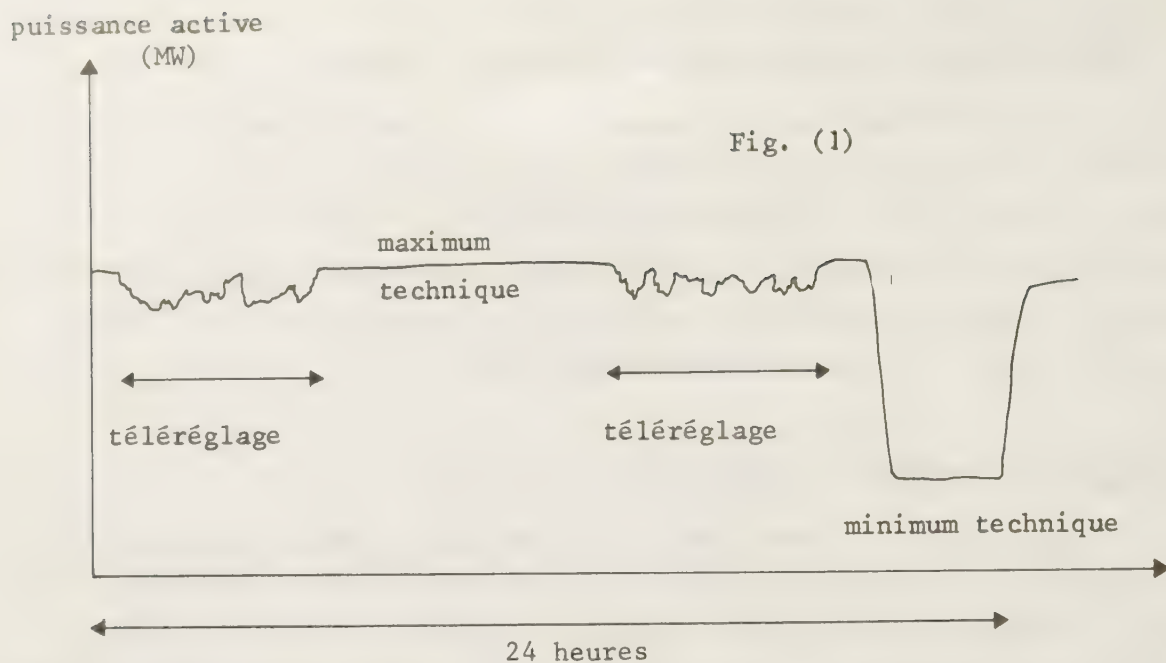
q_c = débit de combustible

q_d = débit d'eau de désurchauffe

q_s = débit de vapeur surchauffée

Les grandeurs réglées sont p_s^* et t_s^* , les grandeurs réglantes q_c et q_d , tandis que q_s constitue la perturbation principale.

Cette perturbation suit l'évolution du programme de charge de la centrale : celui-ci est, pour les centrales de réglage, du type de la figure 1.



Enregistrement de la puissance active fournie par une centrale de réglage.

On se propose, dans ce chapitre, d'établir une régulation optimale pour les périodes de téléréglage. Dans ces conditions, la commande s'effectue autour d'un point de fonctionnement et les termes a , b , c , d , e , f , g , h , ℓ et Q_s sont des constantes ($Q_s = q_s$ moyen). Pour la même raison, l'équation (16) peut être linéarisée selon :

$$p_s^* = p_b - \ell \left(1 + 2 \frac{\delta q_s}{Q_s} \right) \quad (18)$$

avec $\delta q_s = q_s - Q_s \quad (19)$

Les variations du débit de vapeur autour de sa valeur moyenne Q_s , sont aléatoires et donc représentées par un modèle stochastique.

L'observation des enregistrements (tels que celui de la figure 1), où apparaissent fréquemment des formes exponentielles, suggère un modèle de Markov du premier ordre :

$$\dot{\delta q_s} = \frac{1}{\tau} \delta q_s + w \quad (20)$$

w = bruit blanc

τ = constante de temps

Ce modèle signifie que, mesurant δq_s à l'instant t_1 , la meilleure prédiction que l'on puisse faire est $\delta q_s(t_1) e^{-\frac{(t - t_1)}{\tau}}$.

Mais τ s'avérant grand devant le temps de réponse présumé du système en boucle fermée, le modèle de δq_s est simplifiable en $\dot{\delta q_s} = w \quad (21)$

D'autre part, q_s étant mesuré continûment, il apparaît donc une nouvelle information à chaque instant. En conséquence, un critère d'optimisation en $[t, t + T]$ s'impose.

Afin de limiter les écarts en pression et en température d'une part les gradients de température sur les tubes de chauffe et de surchauffe et le vieillissement des injecteurs de désurchauffe d'autre part, on prendra un critère de la forme :

$$J = \int_t^{t+T} (t_s^{*2} + \alpha^2 p_s^{*2} + \delta^2 \dot{q}_c^2 + \epsilon^2 \dot{q}_d^2) dt$$

où, par exemple, α vaut 4 si l'on considère qu'un écart de 1 bar est aussi fâcheux qu'un écart de température de 4°C.

La présence dans le critère des dérivées des débits d'entrée q_c et q_d nécessite, sur le plan théorique, de traiter ces derniers comme des états. Le modèle utilisé pour la détermination de l'optimiseur est donc formé des équations (13) (14) (15) (17) (18) (21) auxquelles sont adjointes $\dot{q}_c = u_1$ (22) et $\dot{q}_d = u_2$ (23)

Il n'y a, en revanche, pas de raison d'estimer les "états" q_c et q_d dont les mesures sont de bonne qualité. La même remarque vaut pour q_s . Les équations de l'estimateur sont donc (13) (14) (15), (16) ou (18) (cf plus loin), (17).

3 - RESOLUTION EN SIMULATION -

3-1 Le problème d'optimisation :

Le vecteur d'état est donc $(p_b, \theta, t_s, \delta q_s, q_c, q_d)^T = \underline{x}$ et le vecteur de sortie $(t_s, p_b - \lambda(1 + 2 \frac{\delta q_s}{Q_s}))^T = \underline{y}$

Les équations utilisées ((13) (14) (15) (17) (18) (21) (22) (23)), étant toutes linéaires, la commande $u^* = (\dot{q}_c, \dot{q}_d)^T$ est donnée par (7) (8) et (9). Compte tenu des remarques effectuées précédemment quant à l'estimateur, la structure optimale est celle de la figure (2).

Les matrices K et ϕ sont intégrées hors ligne à rebours sur la période d'optimisation T , à l'aide d'une sous routine IBM (HPCG). C'est un programme prédicteur - modificateur - correcteur de Hamming du 4ème ordre, à démarrage par la méthode de Runge Kutta. Le principe repose sur une équation du type Adams - Moulton, avec des coefficients différents destinés à la "stabiliser".

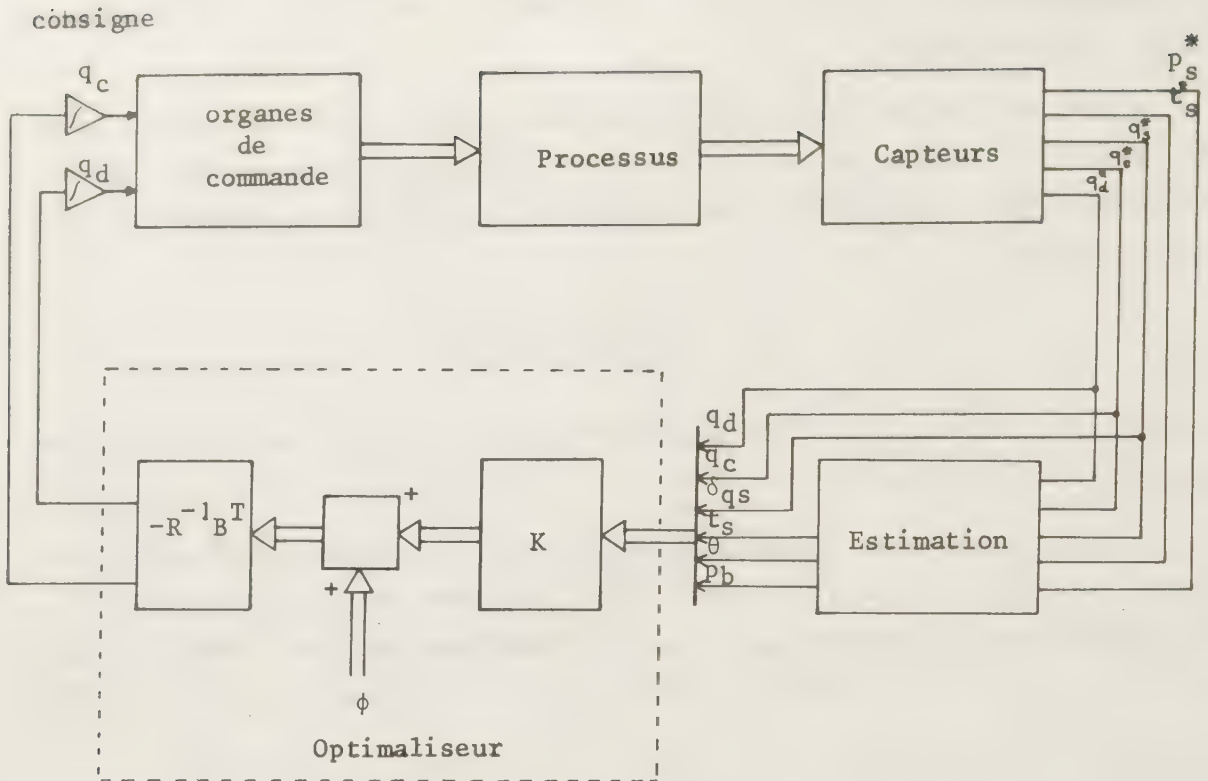


Fig. (2)

Pratiquement, il n'est ni indispensable, ni souhaitable de calculer $\underline{\phi}$. En effet, $\underline{\phi}$ doit être tel que $\underline{u}^* = 0$ pour les valeurs de $\underline{x}$ correspondant au régime permanent ($t_s = 0, p_s = 0$) ; ceci devant être, en particulier, vrai pour $\delta q_s = 0$. De même, la colonne de $R^{-1} B^T K$ correspondant à δq_s doit être ajustée de telle sorte que $\underline{u}^* = 0$ pour le régime permanent ($t_s = 0, p_s = 0$). Ces caractéristiques de régime permanent servent d'ailleurs de base à la vérification statique du câblage analogique.

3-2 Le problème d'estimation :

De même que l'optimisation nécessite un choix de coefficients qui la caractérisent - les coefficients du critère de performance -, de même l'estimation requiert la détermination d'informations à priori - les densités spectrales de puissance des bruits blancs $\underline{w}$ et $\underline{v}$ -, qui fixent les dynamiques de l'estimateur.

On doit, cependant, admettre qu'à moins que les perturbations aléatoires soient relativement importantes, (par exemple signal noyé dans le bruit) la recherche des densités spectrales de puissance n'est qu'un moyen d'obtenir un premier ensemble des valeurs pour $\hat{K}$, et qu'il n'y a pas lieu de s'attacher à la précision de ces densités spectrales.

Dans cet ordre d'idées, il est superflu et inutilement compliqué de chercher les corrélations entre les différents bruits. On suppose donc que V (et éventuellement W , cf plus loin) est une matrice diagonale et que $N = 0$ (cf (3)).

Examinons comment parvenir à des matrices V et W ayant un sens.

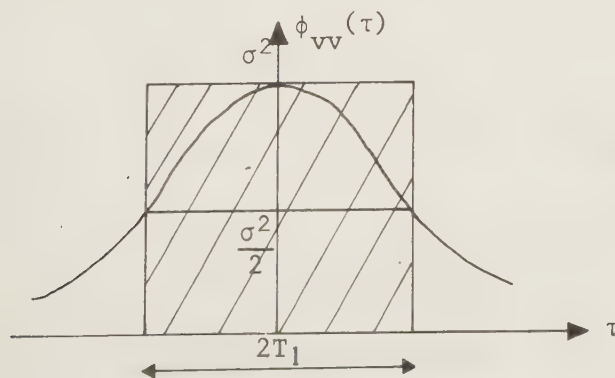
L'observation des équations (1) et (2) montre que les bruits additifs représentent des écarts entre le comportement du processus réel et celui de son modèle déterministe.

Ces écarts sont dus à la superposition de plusieurs effets :

- a) il y a d'abord un bruit de mesure,
- b) les entrées réelles sont différentes des entrées mesurées qui sont utilisées dans le modèle,
- c) il y a des entrées parasites, non mesurables,
- d) il existe des erreurs de modèle dues à la structure simplifiée du modèle par rapport à celle du processus réel, et à l'imprécision de l'identification.

Pour justifier le choix $N = 0$, il y a lieu de distinguer entre l'effet (a) et les trois autres. Ainsi y constitue exclusivement le bruit de mesure, et sa densité spectrale peut être obtenue de la manière suivante.

L'observation d'un enregistrement des sorties permet de détecter la fonction de corrélation $\phi_{vv}(\tau)$, dont la forme générale est indiquée figure 3 et est, le plus souvent, assez éloignée d'une impulsion de Dirac (requis par le bruit blanc). L'approximation du bruit de mesure par un bruit blanc est cependant légitime si $\phi_{vv}(\tau)$ a une largeur faible vis-à-vis du temps de réponse de l'estimateur.



Sur la fig.(3), il est possible d'estimer au moins approximativement :

- T_1 , le "temps de coupure" du signal, tel que le coefficient de corrélation entre $v(t)$ et $v(t + \tau)$ soit de l'ordre de $1/2$.

- l'écart type σ de $v(t)$

On considère alors que :

$$\phi_{vv}(\tau) \approx 2T_1 \sigma^2 \delta(\tau) \text{ (cf fig. 3)}$$

qui donne $V \approx 2T_1 \sigma^2$

Ayant obtenu V et, ainsi, formulé l'effet (a), il reste à examiner les autres effets qui peuvent être considérés comme formant un seul écart : celui dû à l'imprécision du modèle. Ce point de vue constitue l'apport essentiel de la théorie stochastique.

Remarquons que cet écart est évidemment fonction de la classe des commandes. Il serait donc envisageable de chercher une relation explicite entre les caractéristiques des commandes et celles de l'écart. Mais ce serait effectuer un "complément d'identification" et annuler, de ce fait, la simplification initiale apportée par le choix d'un modèle d'ordre peu élevé.

D'autre part, il est plus plausible que l'imprécision du modèle se manifeste par un signal continu du type "dérive" que par un bruit blanc.

On s'en tiendra cependant pour l'instant à des entrées w blanches, pour des raisons de simplicité de structure de l'estimateur (cf chapitre 2, §C), et on étudiera au paragraphe suivant comment pallier les écarts permanents de régulation, dus aux "hypothèses bruits blancs".

La détermination de la matrice W est effectuée de la manière suivante :

La sortie du processus est comparée à celle de son modèle déterministe simulé analogiquement. De l'écart observé, on déduit la variance de la sortie, qui, à l'aide des formules de transmissions des signaux aléatoires, permet d'obtenir la densité spectrale de puissance de W .

On sait, en effet, (par exemple, Bryson -1- p 331) qu'un système linéaire d'équations $\dot{x} = A(t) x + w$ possède une matrice de covariance en x : X , solution de :

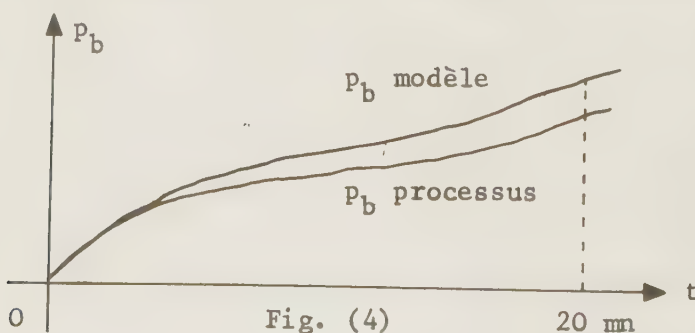
$$\dot{X} = A X + X A^T + W \quad (24)$$

$$\text{où } E[\omega(t) \omega^T(\tau)] = W(t) \delta(t - \tau)$$

$$X(t_0) = E(x(t_0) x^T(t_0))$$

$$\text{Dans l'hypothèse de stationnarité, on a } A X + X A^T + W = 0 \quad (25)$$

Ainsi, l'observation des pressions (p_b) issues du modèle déterministe et du processus (cf fig. 4), amène à constater qu'il se superpose à la valeur



déterministe de p_b un signal de Wiener dont la variance augmente de $(1 \text{ bar})^2$ en 20 mn .

$$\text{D'après (23) } W = \frac{(1 \text{ bar})^2}{20 \text{ mn}}$$

Pour les équations de température qui sont stables, on utili-

sera le fait que l'écart type entre la sortie du modèle et celle du processus est de l'ordre de 5°C. L'équation (25) permet de remonter à W, qu'éventuellement ici, par simplicité, on ne supposera pas diagonale.

Les résultats expérimentaux issus de cette régulation optimale stochastique sont regroupés au paragraphe 5.

4 - RESOLUTION DES PROBLEMES D'APPLICATION "EN LIGNE" DUS AUX ERREURS DE MODELE -

La principale insuffisance de la méthode, telle qu'elle a été utilisée ci-dessus, réside dans l'apparition d'écarts permanents de régulation lorsque le modèle recèle des erreurs dans sa version statique.

C'est bien entendu toujours le cas et il y a alors deux solutions :

- soit que l'utilisateur tente d'améliorer la précision de l'identification afin d'amener les écarts permanents dans un domaine considéré comme admissible. Pour peu que le processus soit grandement non linéaire ou non stationnaire, la solution ne mène qu'à une complication importante de la structure du modèle, ou à une impossibilité.

- soit que l'on tienne compte de ces imprécisions en les considérant comme des dérives lentes, c'est-à-dire des bruits de Wiener additifs. Cette hypothèse se justifie parfaitement, l'essentiel étant de placer ces bruits en nombre minimal et à bon escient.

Avant de résoudre le problème de la commande du générateur de vapeur, il nous paraît intéressant d'examiner le procédé proposé sur un exemple élémentaire.

4-1 Etude d'un exemple :

Soit un système à réguler d'équations

$$\dot{x} = u + d + w$$

$$y^* = x + v$$

où d est une constante inconnue

v, w des bruits blancs gaussiens indépendants

La minimalisation du critère de performance :

$$J = E \left\{ \frac{1}{2} \int_t^{t+T} (y^{*2} + \dot{u}^2) dt / y(\sigma) \right\} \quad \sigma \in [t, t+T]$$

mène au schéma suivant

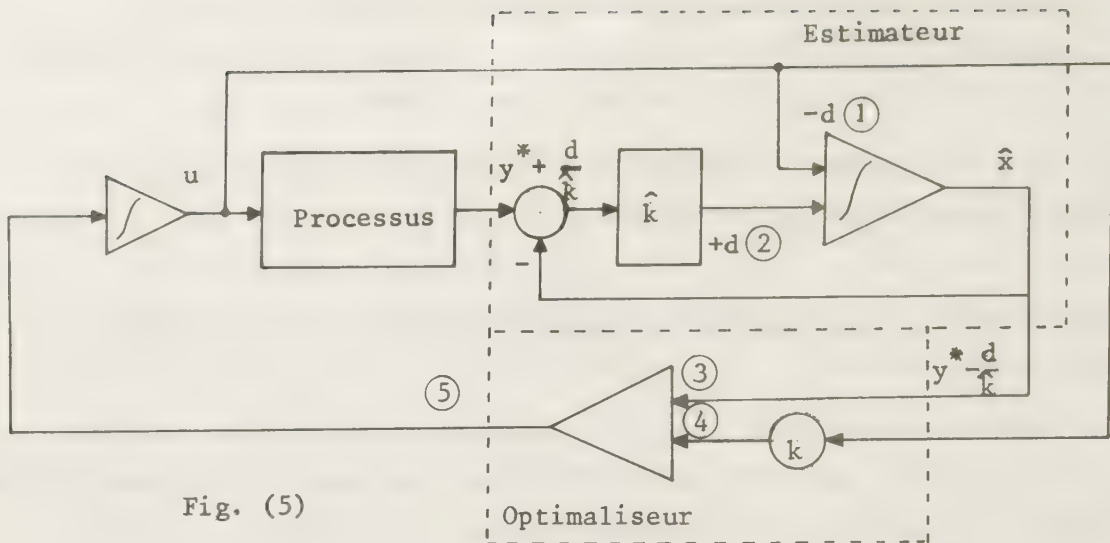


Fig. (5)

Au vu des équations d'état et du critère, le bouclage optimal est constitué d'un terme proportionnel (3) et d'un "terme dérivée" (4) utilisant l'équation d'état elle-même.

Si $d = 0$, en régime permanent, les valeurs moyennes de $\hat{x}$ et de y^* sont égales puisque $\dot{\hat{x}} = u$ est en moyenne nul.

Si maintenant une composante continue inconnue (d) apparaît dans le processus et n'est pas incluse dans le modèle, le terme u en régime permanent n'est plus nul mais vaut $-d$ (cf (1) sur la figure). Le signal (2) à l'entrée de l'intégrateur en $\hat{x}$ s'établit donc à $+d$ et ainsi $\hat{x} = y^* - \frac{d}{k}$. Comme d'autre part, (5) est également nul en régime permanent, (3) + (4) = 0 entraîne $y^* - \frac{d}{k} - k d = 0$, soit $y^* = d(\frac{1}{k} + k)$

A la lumière de cette explication, on remarque que cet écart statique non nul (y^*) provient de la non égalité en régime permanent entre $\hat{x}$ et y^* , c'est-à-dire plus généralement entre la sortie mesurée et la sortie estimée. L'optimaliseur étant, en effet, calculé pour annuler la sortie - ou plus généralement l'écart de régulation - estimée, il est nécessaire qu'il y ait en régime permanent égalité entre $\hat{x}$ et y^* .

Comment y parvenir ?

Plusieurs solutions sont possibles, qui, à chaque fois, introduisent en quelque sorte un degré de liberté supplémentaire dans les équations d'estimation.

1°) On peut considérer que u est non mesuré, donc requiert une estimation.

Les équations d'état deviennent pour l'estimation

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + w_1$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = u + w_2$$

$$y^* = \hat{x}_1 + v$$

et le critère $\frac{1}{2} \int_t^{t+T} (y^{*2} + u^2) dt$

d'où la structure de la fig.(6).

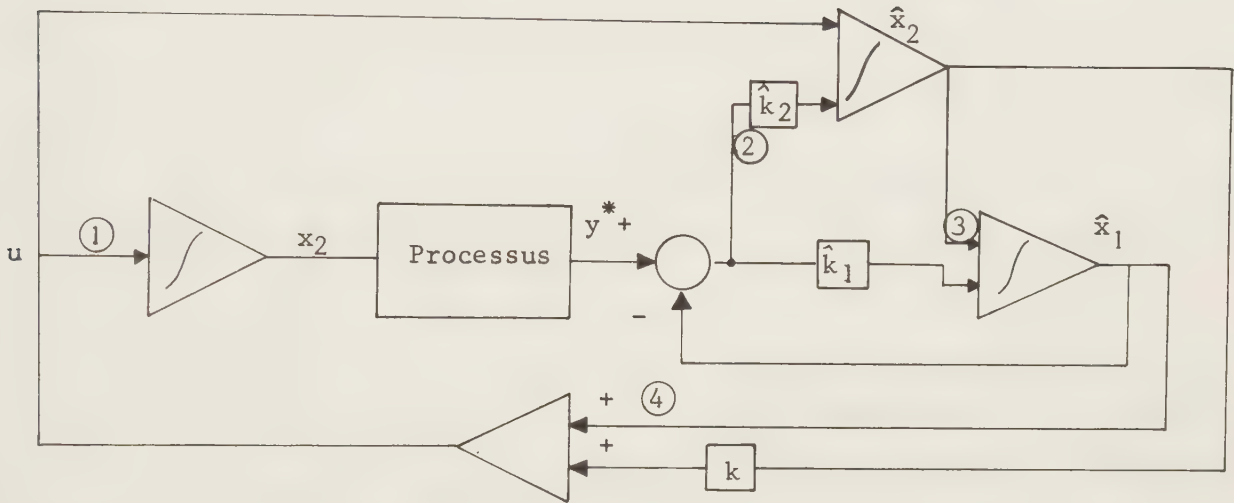


Fig. (6)

Ici, quelles que soient les erreurs de modèle, le terme (1), qui s'annule en régime permanent, entraîne l'annulation de (2), donc de (3) et de (4). Ainsi, on a à la fois $\hat{x}_1 = y^*$ et $\hat{x}_1 = 0$.

Bien que ce soit une question de cas particulier, on notera que cette solution néglige une information importante : la mesure, généralement de bonne qualité, de x_2 , qui est la véritable commande.

2°) Une solution plus naturelle consiste à s'attaquer directement à la cause. Puisque $\hat{y} \neq y^*$, écrivons que $y^* = x_1 + x_2 + v$ où x_2 est un bruit de Wiener.

Les équations d'état s'écrivent donc :

$$\dot{\hat{x}}_1 = u + w_1$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = w_2$$

$$y^* = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + v$$

et le critère $\frac{1}{2} \int_t^{t+T} (y^{*2} + \dot{u}^2) dt$

Malheureusement, dans le cas particulier de cet exemple, on constate que le système est non observable : l'estimation de x_1 et de x_2 à partir de la seule mesure y^* est impossible.

3°) Le signal de Wiener peut, par contre, être adjoint à l'état, au lieu de l'être à la mesure.

Les nouvelles équations sont, cette fois, celles d'un système observable :

$$\dot{x}_1 = u + x_2 + w_1$$

$$\dot{x}_2 = w_2$$

$$y^* = x_1 + v$$

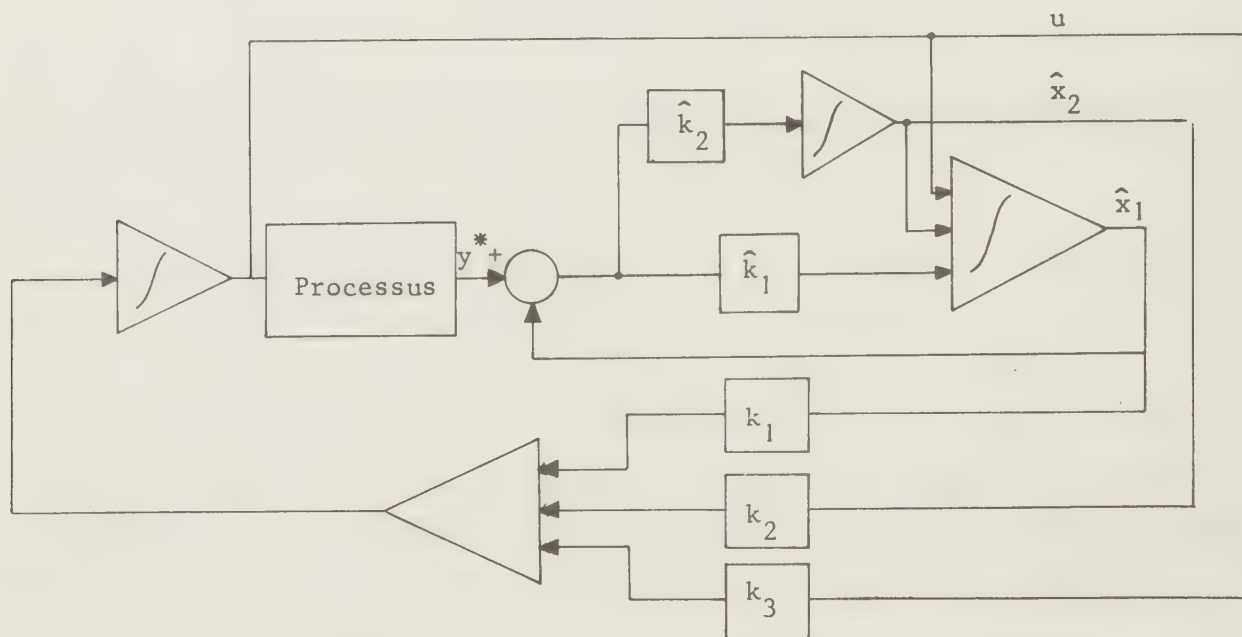


Fig. (7)

On remarque sur la figure que $y^* = \hat{x}_1$ et $\hat{x}_2 + u = 0$. L'optimaliseur (k_1, k_2, k_3) est calculé de telle façon qu'en régime permanent $k_1 \hat{x}_1 + k_2 \hat{x}_2 + k_3 u = 0$ avec $\hat{x}_1 = y^* = 0$, ce qui donne $k_2 = k_3$.

Si une dérive d apparaît dans les équations du processus ($\dot{x}_1 = u + d$), en régime permanent, $u + d = 0$ d'une part, et $u + \hat{x}_2 = 0$ d'autre part, dans l'estimateur (et donc $\hat{x}_2 = d = -u$).

Comme l'optimaliseur assure $k_1 y^* + k_2 \hat{x}_2 + k_3 u = 0$, on a $y^* = 0$ quel que soit d .

En définitive, cet exemple élémentaire et sa solution montrent deux choses :

- les imprécisions de modèle se manifestent par un écart permanent entre $\hat{y}$ et y^* , qu'il faut pallier, car l'optimaliseur est calculé pour annuler

$\hat{y}$ et non y^* .

- le palliatif le plus naturel consiste à supposer l'existence d'un signal de Wiener additif sur les sorties dont les écarts statiques sont inadmissibles. Encore convient-il alors de s'assurer de l'observabilité du nouveau système.

4-2 Application au générateur de vapeur :

La commande "en ligne", telle que décrite au paragraphe 3, engendre notamment un écart permanent maximal de l'ordre de 4°C , compatible avec la précision de l'identification. De même, l'écart de pression peut atteindre quelques dixièmes de bar.

La solution à cet inconvénient, directement inspirée de l'exemple précédent, consiste à ajouter un signal de Wiener dans l'équation de mesure de la température.

$$\begin{aligned}\text{Soit } t_s^* &= t_s + x_a + v \\ \dot{x}_a &= w_a\end{aligned}$$

Le problème de la pression n'est pas aussi immédiat à régler, car cette solution engendre un système non observable. On a remarqué, par expérience, que la cause de l'existence de l'écart permanent de pression n'est pas principalement l'imprécision de l'équation (13), mais plutôt la linéarisation de l'équation (16) (cf. (18)). En conséquence, il est justifié de considérer que le δq_s de l'équation (18) n'est pas lié à la mesure de q_s , mais qu'il doit être estimé.

Ainsi, p_b et δq_s doivent être estimés à l'aide des équations d'état :

$$\dot{p}_b = a q_c + b q_d - b(Q_s + \delta q_s) + w_1$$

$$\dot{\delta q}_s = w_2$$

et d'une seule mesure $p_s^* = p_b - \ell(1 + 2 \frac{\delta q_s}{Q_s})$,

q_c et q_d étant considérés, pour l'estimateur, comme des grandeurs de commande parfaitement mesurées, on peut vérifier que ce nouveau système est observable.

La solution proposée ici est un compromis des solutions (2) et (3) de l'exemple du paragraphe 4-1.

L'ensemble de ce paragraphe a donc permis d'examiner et de mettre au point diverses méthodes supprimant les écarts permanents de régulation et on peut penser que, par son éclectisme formel, l'application sur unité pilote est

un exemple susceptible de généralisation à d'autres processus.

5 - RESULTATS EXPERIMENTAUX -

Le modèle du processus et le critère employé sont ceux du paragraphe 2, avec les valeurs numériques suivantes :

$a = 0,396 \cdot 10^{-3}$	$f = 2$	$\alpha^2 = 16$
$b = 0,325 \cdot 10^{-4}$	$g = 1,25$	$\delta^2 = \epsilon^2 = 30$
$c = 0,12 \cdot 10^{-1}$	$h = 0,1$	$T = 600 \text{ sec}$
$d = 1,375$	$l = 1,225$	Les débits sont exprimés en kg/h, les pressions en bar, les températures en °C., et le temps en seconde.
$e = 0,65 \cdot 10^{-2}$	$Q_s = 1000 \text{ kg/h}$	

La figure 8 concerne des résultats obtenus sur le générateur de vapeur. On peut observer les réponses en pression (p_g) et en température (t_g) à des échelons de débit de vapeur (q_g) atteignant 20 % de la valeur nominale (1000 kg/h). Les commandes (débit de combustible q_c et débit d'eau de désurchauffe q_d) y figurent également.

Lors de cet enregistrement, l'estimateur ne comportait pas de signaux de Wiener susceptibles de parfaire les régimes permanents. De fait, on remarque notamment un "statisme" atteignant pour la température 2°C.

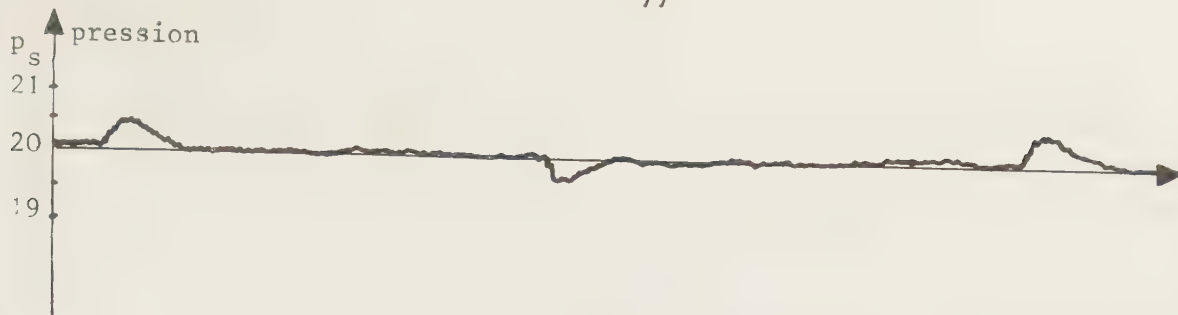
L'introduction de signaux de Wiener additifs, conformes à la description du paragraphe 4-2, et, partant, la suppression de ce statisme, sont étudiées en simulation à l'aide des courbes suivantes.

La figure 9 représente les mêmes grandeurs que précédemment, auxquelles a été adjoint l'estimation du terme δq_g (cf § 4-2). Ici, le modèle et le processus sont identiques : l'enregistrement doit être considéré comme une référence pour la suite quant à l'allure des réponses transitoires.

La figure 10-a montre qu'un écart de 10 % entre le terme l (cf équation (18)) du processus et celui du modèle, non seulement n'influe pas sur le régime permanent, mais ne dégrade nullement les transitoires (cf fig. 9). En cela, la régulation mérite le qualificatif d'autoadaptative.

Si, cependant, cet écart atteint 50 % (figure 10-b), la représentation de l'erreur d'équation par un signal de Wiener n'est plus suffisante et ne permet plus de conserver les transitoires.

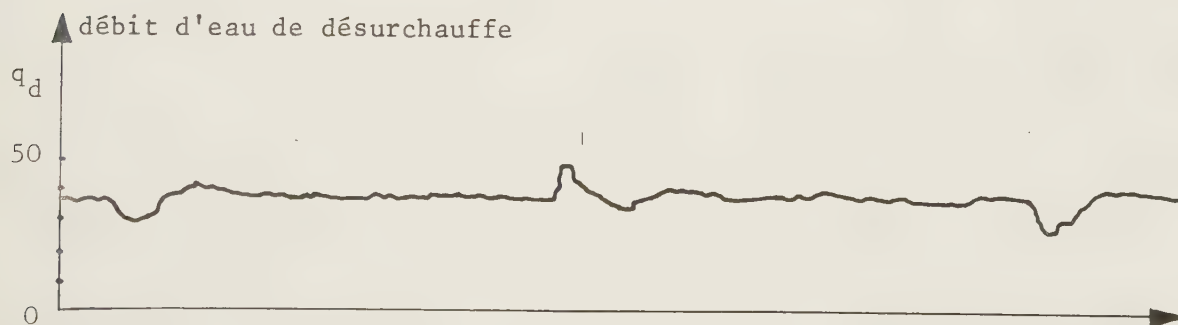
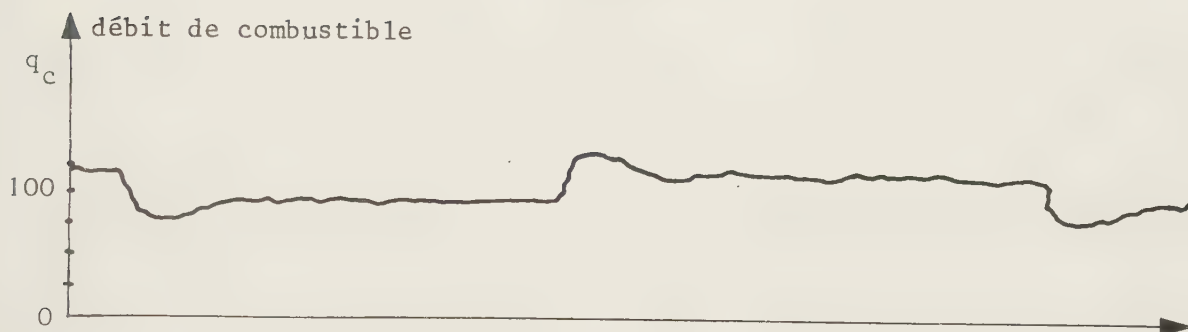
Cette caractéristique est encore plus sensible si le terme h (cf équation



1 mm



Fig. (8)



Réponses du générateur à des échelons de vapeur (pas de signaux de Wiener additifs).

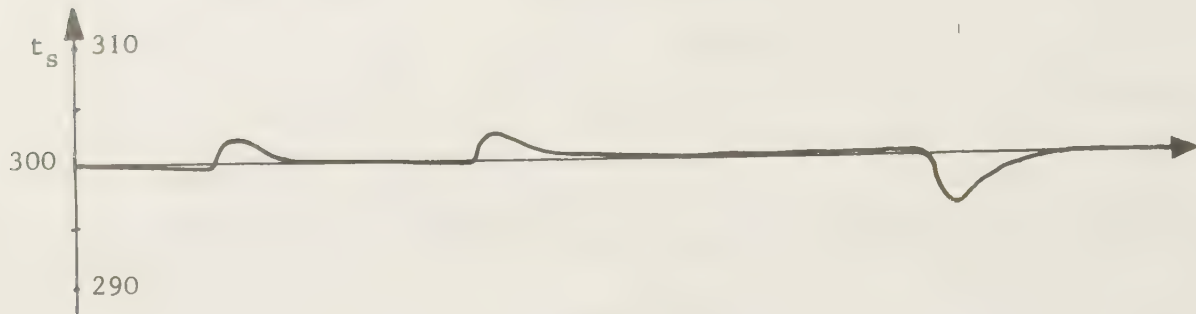
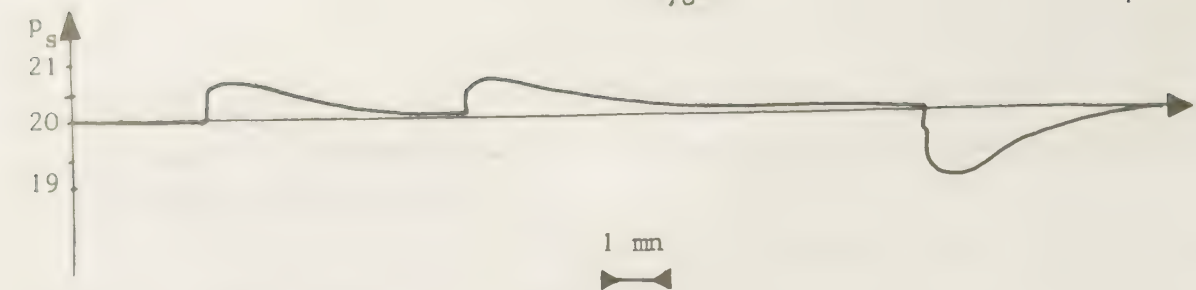
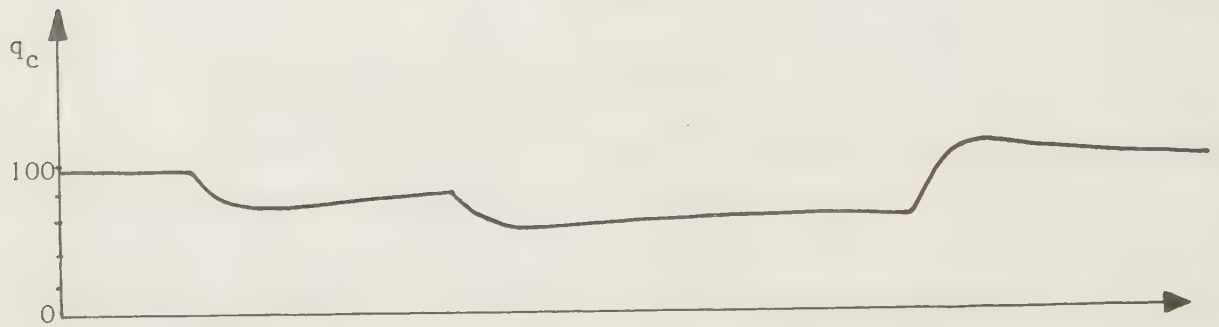


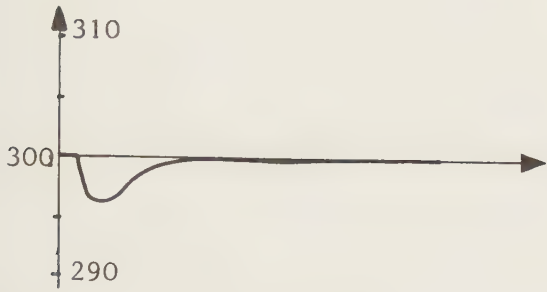
Fig. (9)



Réponses en simulation (δq_s estimé)



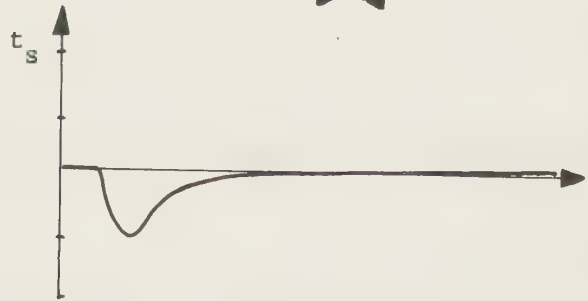
1 mm



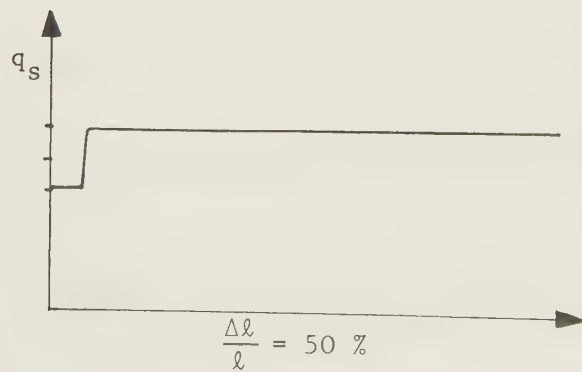
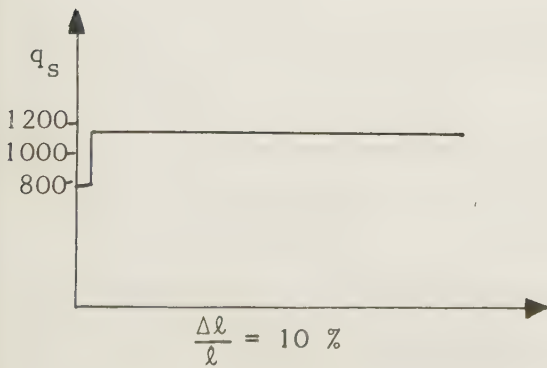
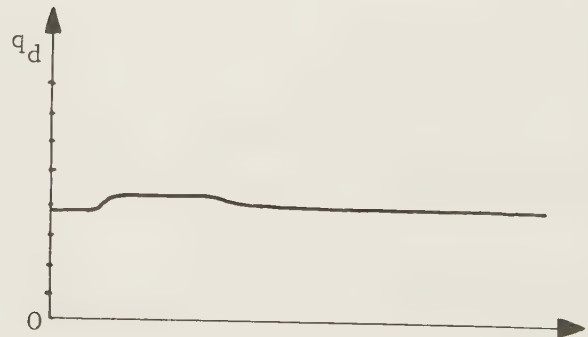
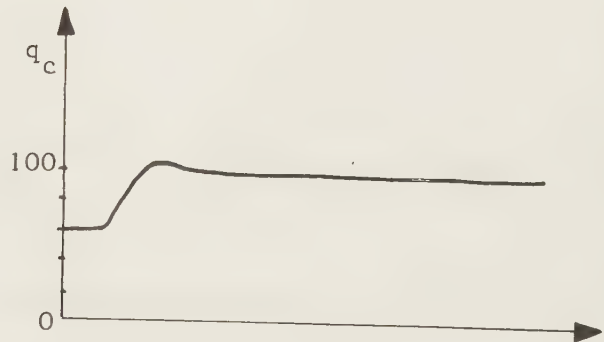
- fig. 10-a -

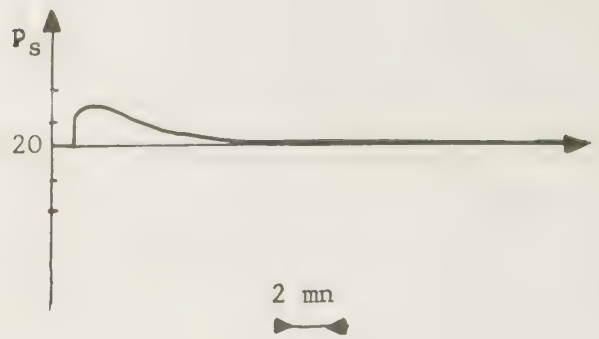
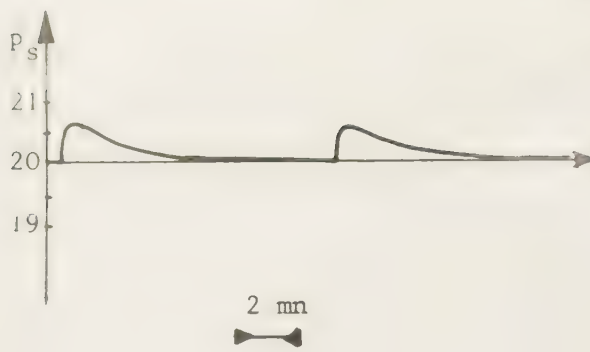


1 mm



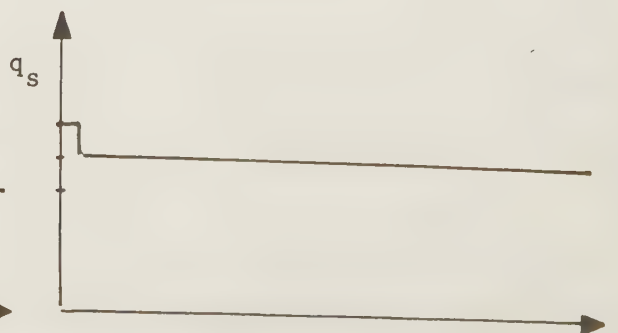
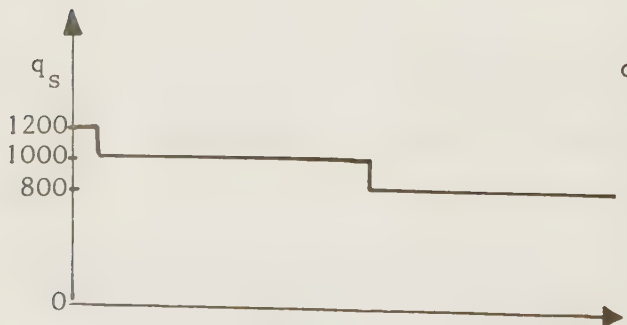
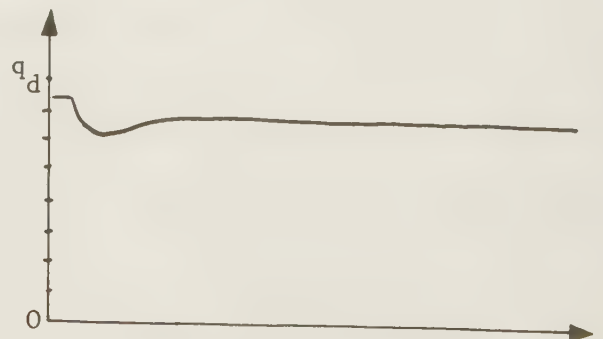
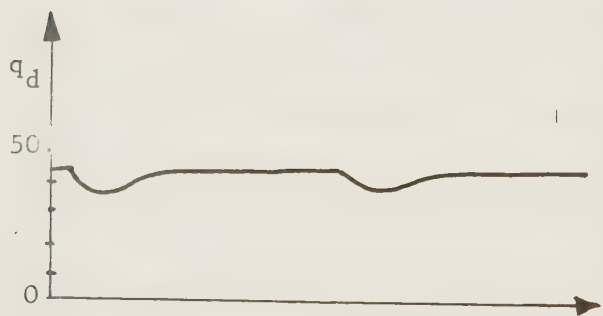
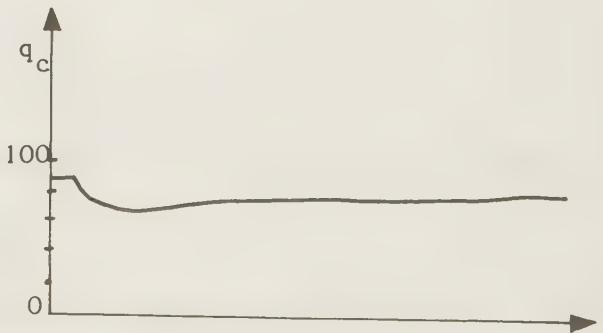
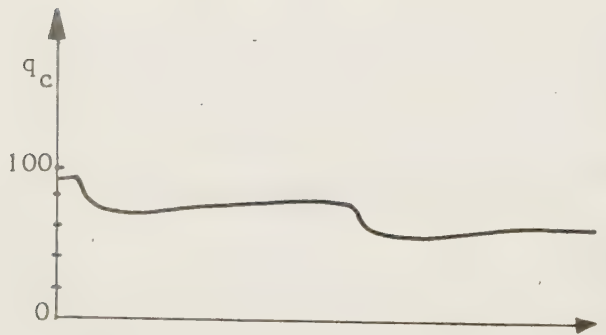
- fig. 10-b -





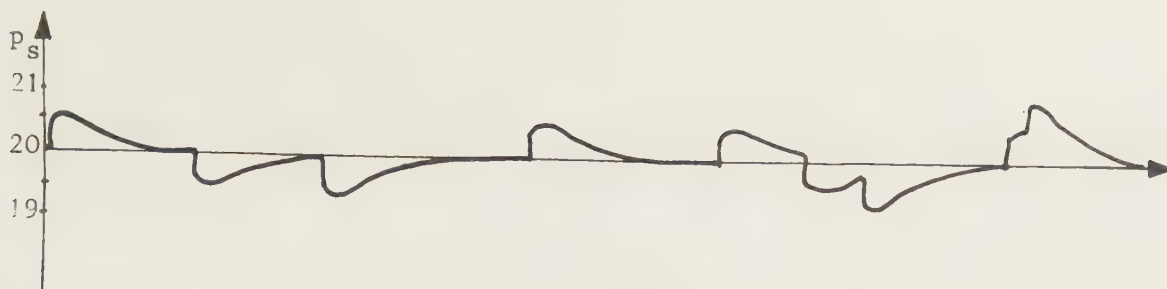
- fig. 11-a -

- fig. 11-b -



$$\frac{\Delta h}{h} = 20 \%$$

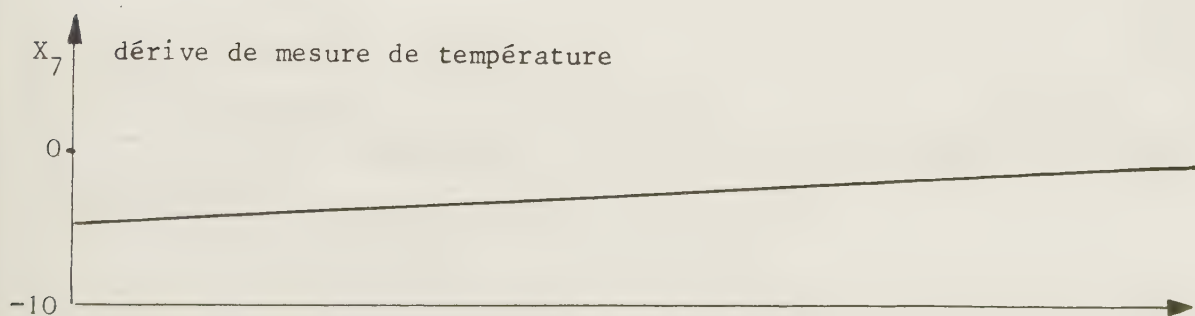
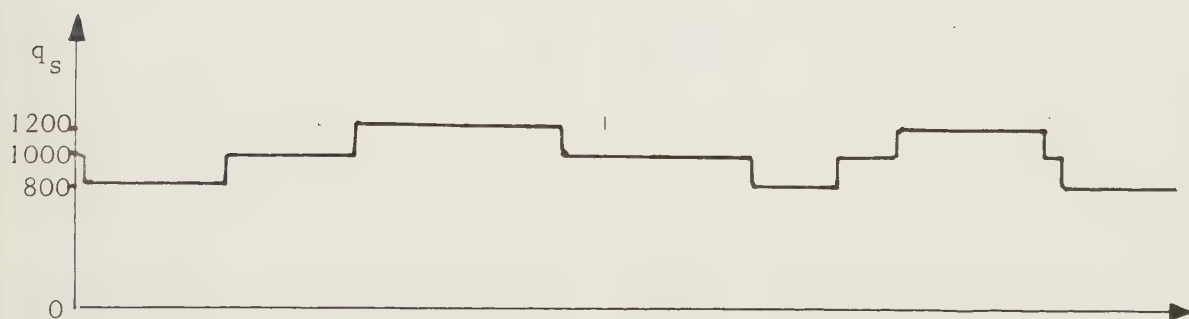
$$\frac{\Delta h}{h} = 50 \%$$



2 mn



Fig. (12)



Influence d'une dérive de température

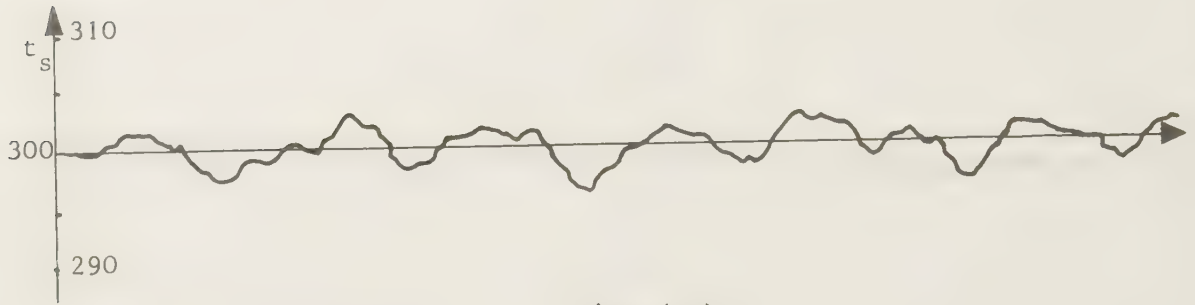
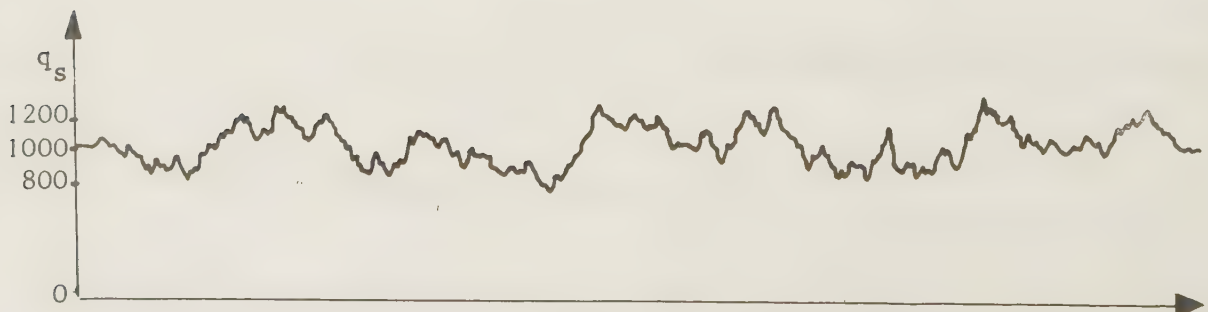


Fig. (13)



Réponses à une perturbation aléatoire (cas idéal)

tion (15)) est erroné (fig. 11). En 11-a l'erreur seule est de 20 % et il n'y a pas dégradation des transitoires tandis qu'en 11-b l'erreur atteint 50 % et le système est devenu très lent (à noter que l'échelle des temps a doublé sur cet enregistrement).

Pour tester totalement la régulation en cause, on a supposé (fig. 12) qu'une dérive existait sur la mesure de la température : les performances ne sont pas altérées.

Enfin, la figure 13 montre le comportement du système régulé idéal (c'est-à-dire processus = modèle) en présence de perturbations aléatoires.

6 - CONCLUSION -

Ce chapitre, qui termine la première partie et en même temps la première étape vers la régulation dynamique fonctionnelle, constitue une application de l'optimisation quadratique à une unité pilote, et complète ainsi, sur le plan pratique, les développements théoriques des chapitres I et II.

Cette régulation établit notamment un compromis explicite et quantitatif entre les écarts de régulation (pression et température) et les gradients de température (sur le métal des circuits de vapeur et d'eau de désurchauffe).

L'aspect stochastique de la théorie permet de tenir compte à la fois des perturbations inhérentes au fonctionnement des centrales en télé réglage, et des imprécisions du modèle utilisé pour déterminer la régulation. En ce qui concerne ce dernier point, on s'est attaché à employer la version la plus simple du principe de séparation dans laquelle les bruits additifs sont blancs. Il est cependant nécessaire, afin d'éviter les erreurs statiques de régulation, d'adjoindre des signaux de Wiener sur les mesures qui ne rejoignent qu'imparfaitement leurs consignes.

L'inconvénient majeur de l'optimisation quadratique stochastique réside dans la détermination des densités spectrales de puissance des bruits blancs.

Il faut, cependant, considérer ces coefficients comme des outils permettant d'élaborer une régulation et admettre que leur précision ne présente pas un intérêt primordial. Autrement dit, il faut d'avantage retenir de la "partie estimateur" de cette méthode la structure du bouclage qu'elle fournit que les valeurs des coefficients de ce bouclage.

Il serait d'ailleurs peut être souhaitable, dans une phase ultérieure d'application sur processus réel, de considérer les résultats de l'estimation, présentés ici comme des indications pour la mise en oeuvre de filtres consti-

lues à la fois - selon les conditions de fonctionnement et les impératifs économiques de mise en oeuvre - d'estimateurs de Kalman, d'observateurs de Luenberger et de circuits statiques fondés sur la pseudo-inverse par exemple.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- BRYSON A.E. - "Applied optimal control"
HO Y.C. 1969 Blaisdell
- 2- de LARMINAT Ph. - "Etude d'une régulation optimale"
THOMAS Y. Annexe V - Rapport final D.G.R.S.T.
Comité automatisation
Contrat n° 68-01-409
Publication E.N.S.M. - Juin 1970

SECONDE PARTIE

DETERMINATION "HORS LIGNE" DE TRAJECTOIRES OPTIMALES CONTRAINTES

Précédemment, a été développée la méthode d'optimisation quadratique pour établir une régulation autour d'un point de fonctionnement (ex : télé-réglage). Aucune des grandeurs considérées ne risquait alors d'atteindre les limites assignées par les butées ou les contraintes permises.

On supposera maintenant que l'évolution des consignes ou des perturbations est telle que les commandes ou les états du processus à réguler sont susceptibles de parvenir à saturation.

Ce nouveau problème est encore plus complètement justiciable des théories de l'optimisation dynamique fonctionnelle et peut être indifféremment traité par les méthodes variationnelles ou celles d' "invariant imbedding".

Il ne semble pas cependant que, dans l'état actuel de la technologie et de la structure des calculateurs, l'utilisation rigoureuse des conditions d'optimalité, issues de ces théories, permette d'envisager, du moins à court terme, une commande "en ligne" de processus.

L'étude de l'application des conditions d'optimalité aux processus contraints n'en présente pas moins un grand intérêt dans la mesure où elle fournit des trajectoires optimales constituant, d'une part, une visualisation des performances que l'on peut attendre du processus régulé, et, d'autre part, un excellent point de départ pour une commande "en ligne" sous optimale.

C'est pourquoi, cette deuxième partie sera consacrée à la résolution exacte du problème d'optimisation avec contrainte, tandis que la dernière partie traitera de commandes "en ligne" sous-optimales.

Le chapitre I, en effet, constitue un apport théorique à l' "invariant imbedding" dont on démontre la validité en présence de contraintes sur le vecteur de commande.

La méthode est ensuite appliquée (chapitre II) à la détermination des trajectoires optimales d'un système linéaire contraint (en commande) muni d'un critère quadratique.

Le chapitre III traite sur le plan théorique des méthodes variationnelles en présence de contraintes sur le vecteur d'état, et le chapitre IV, enfin, fournit des algorithmes numériques et hybrides issus et complémentaires de ces méthodes variationnelles. On y montre, notamment, à quel prix pourrait être réalisée, par voie hybride, une commande "en ligne" de la chaîne de surchauffe du générateur de vapeur pilote.

Chapitre I

LES EQUATIONS D' "INVARIANT IMBEDDING"

POUR UNE COMMANDE OPTIMALE CONTRAINTE

Après quelques précisions sur le principe de l' "invariant imbedding", nous donnons les conditions d'optimalité résultant d'un problème d'optimisation multivariable où le vecteur de commande est contraint. On démontre ensuite que ces équations satisfont la théorie de Pontryagin.

1 - LE CONCEPT D' "INVARIANT IMBEDDING" -

Reprenant les idées générales de l'introduction, on peut dire que l' "invariant imbedding" permet de résoudre un problème particulier en l'insérant dans une famille de problèmes dont, d'une part, les "liens de parenté" sont connus, et dont, d'autre part, l'un des membres possède une solution évidente.

Il s'agit donc beaucoup plus d'un principe général que d'une méthode propre à un domaine particulier. De fait, des problèmes aussi variés que la solution des équations intégrales de Fredholm, la propagation des ondes, la diffusion des neutrons, la recherche des valeurs propres des systèmes linéaires, ont été abordés sous l'angle de l' "invariant imbedding". A ce sujet, on pourra consulter la bibliographie du chapitre 6 de l'ouvrage de E.S. LEE (1968, 1.) et les récents travaux de R.E. KALABA.

Dans le domaine de l'automatique, l'exemple le plus connu concerne la programmation dynamique, mais les problèmes à valeurs limites en deux points et les problèmes de filtrage ont également reçu des solutions fort intéressantes.

Précisément, un exemple élémentaire de système différentiel à valeurs limites en deux points permet d'éclairer le concept quelque peu philosophique énoncé précédemment.

Considérons le système (1) $\dot{x} = -\lambda$ $x(0) = x_0$
 $\dot{\lambda} = -x$ $\lambda(T) = 0$ T fixé

issu d'un problème de commande optimale traité par les méthodes variationnelles. Le problème particulier concerne l'état fixé x_0 à l'instant fixé 0. L'intégra-

ion de ce système est inadaptée aux calculateurs du fait de la méconnaissance de $\lambda(0)$.

Ce problème particulier fait partie d'une famille de systèmes différentiels à valeurs limites en plusieurs points dont l'instant de départ (a) et l'état de départ $x_0 = c$ sont quelconques, soit (2) :

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = -\lambda & x(a) = c & c \text{ quelconque} \\ \dot{\lambda} = -x & \lambda(T) = 0 & 0 \leq a \leq T \end{array}$$

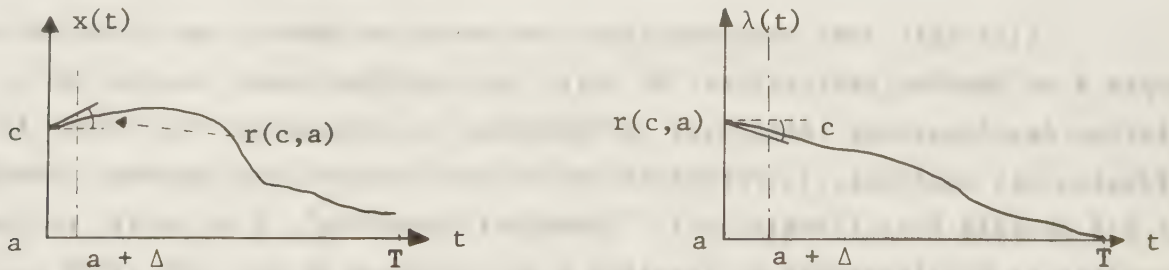
Notons $\lambda(a) = r(c, a)$ la condition initiale manquante fonction, dans le cadre de la famille, à la fois de a et de c .

La solution du problème général consiste à obtenir $r(c, a)$ à partir de la solution triviale du problème de durée nulle ($a = T$) pour lequel, évidemment, $r(c, T) = 0$.

Ayant $r(c, a)$ pour tout a et tout c , on disposera alors de la condition initiale du système (1) : $r(x_0, 0)$.

Il reste à déterminer les liens de parenté des systèmes (2), c'est-à-dire, l'évolution de $r(c, a)$ en fonction de c et de a .

Pour cela, la figure (1) représentant $x(t)$ et $\lambda(t)$ pour $t \in [a, T]$ constitue une bonne visualisation.



Calculons $\lambda(a + \Delta)$ pour la trajectoire optimale,

$$\begin{aligned} - \text{d'une part } \lambda(a + \Delta) &= \lambda(a) + \lambda_a \Delta + O(\Delta^2) \\ &= r(c, a) - c \Delta + O(\Delta^2) \text{ d'après les équations (2).} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} - \text{d'autre part } \lambda(a + \Delta) &= r(c - r(c, a)\Delta, a + \Delta) \quad (\text{par définition de } r) \\ &= r(c, a) - r_c r(c, a)\Delta + r_a \Delta + O(\Delta^2) \end{aligned} \quad (4)$$

en égalant (3) et (4) il vient :

$$r(c, a) - c \Delta + O(\Delta^2) = r(c, a) - r_c r(c, a) \Delta + r_a \Delta + O(\Delta^2)$$

Soit en divisant par Δ et faisant tendre Δ vers 0

$$r_a(c, a) - r(c, a) r_c(c, a) = -c \quad (5)$$

La solution de cette équation aux dérivées partielles munie des

conditions initiales $r(c,T) = 0$ (6) permet d'obtenir $r(c,a)$ quels que soient c et a et en particulier pour $c = x_0$ et $a = 0$.

Il a donc été ici possible de convertir un problème différentiel à conditions aux limites en deux points, nécessitant des algorithmes de résolution spécialisés, en une équation aux dérivées partielles pour laquelle des algorithmes ont été développés de longue date.

Il ne faut pas croire pour autant que la théorie de l'optimisation s'en trouve révolutionnée. En effet, résoudre des systèmes aux dérivées partielles s'avère rapidement impossible lorsque le nombre des variables indépendantes excède 3.

Le point de vue de l' "invariant imbedding" n'en présente pas moins un intérêt important, tant sur le plan théorique que sur le plan pratique, où certains cas particuliers mènent à des algorithmes simplifiés (chapitre II).

Nous nous proposons maintenant d'établir les équations de l'optimisation avec contraintes sur la commande dans un esprit différent du précédent : en effet, il n'est pas utile comme ci-dessus de mélanger les méthodes variationnelles et la théorie de l' "invariant imbedding". Il est meilleur de n'avoir recours qu'à un seul point de vue.

2 - LES EQUATIONS D'OPTIMALITE POUR UN PROBLEME AVEC COMMANDE CONTRAINTE -

Rappelons la formulation du problème de Lagrange avec contraintes inégalité sur la commande :

pour un processus d'équations,

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (6)$$

avec $\underline{u}(t)$ tel que $|\underline{u}| \leq M$

(L'hypothèse de saturation ($|\underline{u}| \leq M$) nous paraît pratiquement la plus plausible, mais la démonstration du paragraphe 3 peut être reconduite pour $\underline{u}(t) : \underline{u} \in \Omega$ où Ω est un domaine fermé)

on cherche la commande admissible $\underline{u}^*(t)$ pour $t \in [t_0, T]$ qui minimise le critère de performance :

$$J = \int_{t_0}^T f_0(\underline{x}, \underline{u}) dt \quad (7)$$

$$\text{sachant que } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (8)$$

Ce problème est tout d'abord introduit dans une famille de problèmes semblables mais démarrant à l'instant a (au lieu de t_0) dans l'état $\underline{c}$ (au lieu de $\underline{x}_0$).

Le minimum du critère devient alors une fonction de $\underline{c}$ et de a , soit

$$g(\underline{c}, a) = \min_{\substack{|\underline{u}| \leq M \\ \underline{x}(a) = \underline{c}}} \int_a^T f_0(\underline{x}, \underline{u}) dt \quad (9)$$

Une première équation récurrente est établie à partir du principe d'optimalité de Bellman.

La solution triviale dont nous avons besoin pour démarrer le processus récurrent concerne les problèmes démarrant en $a = T$.

En effet : $g(\underline{c}, T) = 0$ (10)

Le principe d'optimalité s'écrit :

$$g(\underline{c}, a) = \min_{|\underline{w}| \leq M} [f_0(\underline{c}, \underline{w})\Delta + g(\underline{c} + f(\underline{c}, \underline{w})\Delta, a + \Delta)]$$

Ce qui, après développement au premier ordre et simplification par Δ , donne pour Δ tendant vers 0 :

$$g_a(\underline{c}, a) = \min_{|\underline{w}| \leq M} [f_0(\underline{c}, \underline{w}) + \underline{f}^T(\underline{c}, \underline{w}) g_{\underline{c}}(\underline{c}, a)] \quad (11)$$

Ceci suppose que g_a , $g_{\underline{c}}$ existent et que g_{aa} , G_{cc} et g_{ca} soient bornés.

(11) constitue l'équation classique de la programmation dynamique intégrable à partir des conditions initiales :

$$g(\underline{c}, T) = 0 \quad (12)$$

Posons $\underline{w}_{\min} = \underline{r}(\underline{c}, a)$ (13)

La résolution numérique de (11) et (12) présente des difficultés importantes dues à la quantité d'informations qu'il est nécessaire de stocker.

Notamment, la détermination des trajectoires optimales correspondant au problème (7) (8) nécessite la mise en mémoire de la fonction $\underline{r}(\underline{c}, a)$ pour tout $a : t_0 \leq a \leq T$ et tout $\underline{c}$. Plus précisément, (11) est intégré de T à t_0 , tandis que $\underline{r}(\underline{c}, a)$ est stocké pour tout a , puis (6) est intégré de t_0 à T , à partir de (8), en utilisant les valeurs adéquates de $\underline{r}(\underline{c}, a)$.

L'aspect nouveau de ce chapitre concerne justement de nouvelles équations d' "invariant imbedding" qui apportent une intéressante contribution à la résolution de (11).

Pour chacun des problèmes de la famille précédente, l'état comme la commande sont à tout instant des fonctions de a et de c .

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{x}(t, a, \underline{c}) \\ \underline{u} &= \underline{u}(t, a, \underline{c}) \end{aligned}$$

Ainsi, la trajectoire optimale d'un problème d'optimalisation, démarrant à l'instant a dans l'état $\underline{c}$, est donnée par $\underline{x}(t, a, \underline{c})$.

Il est clair que cet état $\underline{x}(t, a, \underline{c})$ est le même pour un problème partant à l'instant $a + \Delta$ dans l'état $\underline{c} + \underline{f}(\underline{c}, r(\underline{c}, a))\Delta$ (Δ faible).

La formulation de ceci donne :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{x}(t, a + \Delta, \underline{c} + \underline{f}(\underline{c}, r(\underline{c}, a))\Delta) \quad (14)$$

dont le membre de droite développé s'écrit :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) + \Delta \underline{x}_a(t, a, \underline{c}) + X_c \underline{f}(\underline{c}, r(\underline{c}, a))\Delta + O(\Delta^2)$$

$$\text{où } X_c = \frac{\partial x_i}{\partial c_j} \quad \begin{array}{l} i : \text{indice de ligne} \\ j : \text{indice de colonne} \end{array}$$

Après simplification par Δ , que l'on fait ensuite tendre vers 0, (14) devient (à partir de maintenant, on supprimera les arguments $t, a, \underline{c}$ chaque fois qu'il est possible) :

$$\underline{x}_a + X_c \underline{f}(\underline{c}, r(\underline{c}, a)) = 0 \quad (15)$$

Il reste à trouver la solution triviale du cas particulier, qui cette fois a lieu pour $a = t$

$$\text{En effet : } \underline{x}(t, t, \underline{c}) = \underline{c} \quad (16)$$

De même, des équations homologues de (15) et (16) concernant la fonction $\underline{u}(t, a, \underline{c})$ peuvent être démontrées.

On trouve :

$$\underline{u}_a + U_c \underline{f}(\underline{c}, r(\underline{c}, a)) = 0 \quad (17)$$

$$\text{et } \underline{u}(t, t, \underline{c}) = r(\underline{c}, t) \quad (18)$$

La validité des équations (15) à (18) est liée à l'existence des matrices $\underline{x}_a$, X_c , $\underline{u}_a$ et U_c et à la "non-infinité" des matrices de dérivées secondes. Comme l'application de cette théorie concernera au chapitre suivant les systèmes linéaires munis de critère quadratique, il n'y a pas lieu ici de s'appesantir sur ce point.

Le nouvel algorithme de calcul améliorant la programmation dynamique s'établit comme suit :

(11) et (12) sont intégrés de T à $a = t_0$

A tout instant t , pour lequel on désire connaître $\underline{x}^*(t)$ et $\underline{u}^*(t)$, les équations (15) (16) (17) et (18) sont adjointes à (11). C'est à la fin des intégrations que l'on trouve $\underline{x}^*(t, t_0, \underline{c})$ et $\underline{u}^*(t, t_0, \underline{c})$.

Contrairement à la programmation dynamique seule où il est nécessaire de conserver en mémoire les fonctions $\underline{g}(\underline{c}, a)$ et $\underline{r}(\underline{c}, a)$ pour tout a , tel que, $t_0 \leq a \leq T$, il n'est utile ici que de garder en mémoire $\underline{g}(\underline{c}, a)$, $\underline{r}(\underline{c}, a)$,

$\underline{x}(t, a, \underline{c})$ et $\underline{u}(t, a, \underline{c})$ pour une seule valeur de a à la fois. De plus, $\underline{x}(t, a, \underline{c})$ et $\underline{u}(t, a, \underline{c})$ sont obtenus en un seul balayage.

La présence d'équations aux dérivées partielles n'en fait pas moins subsister des difficultés de résolution difficilement surmontables pour des dimensions réalistes de $\underline{x}$ et $\underline{u}$. On verra, cependant, que pour des critères quadratiques, des simplifications notables apparaissent puisque les équations (11) (15) et (17) deviennent des différentielles ordinaires.

Il est maintenant intéressant du point de vue théorique de montrer que ces équations satisfont la théorie de Pontryagin.

3 - VALIDITE DES EQUATIONS D' "INVARIANT IMBEDDING" -

Pour le problème (6) (9), le principe du Minimum[†] s'écrit :

$$\min_{|\underline{w}| \leq M} H(\underline{x}, \underline{w}, \underline{\lambda}) = H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}) \quad (19)$$

avec $H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}) = f_0(\underline{x}, \underline{u}) + \underline{\lambda}^T \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \quad (20)$

$\underline{\lambda}(t)$ et $\underline{x}(t)$ sont solutions du système à valeurs limites en deux points :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \quad (21)$$

$$-\dot{\underline{\lambda}} = \underline{H}_{\underline{x}} = f_{0,\underline{x}} + F_{\underline{x}}^T(\underline{x}, \underline{u}) \underline{\lambda} \quad (22)$$

$$F_{\underline{x}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\underline{x}(a) = \underline{c} \quad (23)$$

$$\underline{\lambda}(T) = 0 \quad (24)$$

Pour démontrer que (11) (12) (13) (15) (16) (17) et (18) satisfont les équations (19) à (24), il est nécessaire d'introduire une équation d' "invariant imbedding" supplémentaire en λ .

Procédant de même que pour l'établissement de l'équation (15), il vient :

$$\underline{\lambda}_{\underline{a}} + \underline{\Lambda}_{\underline{c}} \underline{f}(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, a)) = 0 \quad (25)$$

$$\underline{\Lambda}_{\underline{c}} = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} \right)$$

[†] Le principe du Minimum est ici préféré au principe du Maximum en raison de l'équivalence entre l'Hamiltonien et le terme entre crochets de l'équation (11)

Il est d'autre part bien connu, par les travaux effectués sur la programmation dynamique et sur la théorie de Hamilton - Jacobi, que :

$$\underline{\lambda} (t, t, \underline{c}) = \underline{g}_c(c, t) \quad (26)$$

Nous allons maintenant établir successivement les équations (21) (23) (22) (24) et (19), en démontrant à chaque fois que les deux membres de ces équations sont solutions des mêmes systèmes aux dérivées partielles.

3-1 Démonstration de (21) et (23) : $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \quad \underline{x}(a) = \underline{c}$

Avec ses arguments (21) s'écrit :

$$\dot{\underline{x}} (t, a, \underline{c}) = \underline{f}(\underline{x}(t, a, \underline{c}), \underline{u}(t, a, \underline{c})) \quad (27)$$

Par différenciation par rapport à t , (15) devient :

$$\dot{\underline{x}}_a(t, a, \underline{c}) + \dot{\underline{X}}_c(t, a, \underline{c}) \underline{f}(c, r(c, a)) = 0 \quad (28)$$

qui constitue la loi de variation du premier membre de (27) $\dot{\underline{x}}(t, a, \underline{c})$.

Cherchons la condition initiale de (28) :

Pour cela, (16) est dérivée par rapport au temps

$$\dot{\underline{x}}(t, t, \underline{c}) + \underline{x}_2(t, t, \underline{c}) = 0 \quad (29)$$

l'indice 2 signifiant que $\underline{x}$ a été dérivé par rapport à son second argument.

Pour $a = t$, (15) s'écrit :

$$\underline{x}_2(t, t, \underline{c}) = -\underline{X}_c(t, t, \underline{c}) \underline{f}(c, r(c, t)) \quad (30)$$

En reportant (30) dans 29 :

$$\dot{\underline{x}}(t, t, \underline{c}) = \underline{X}_c(t, t, \underline{c}) \underline{f}(c, r(c, t)) \quad (31)$$

ou, d'après (16) :

$$\dot{\underline{x}}(t, t, \underline{c}) = \underline{f}(c, r(c, t)) \quad (32)$$

c'est la condition initiale de (28).

Il reste à montrer que le second membre de (27), noté $\underline{z}(t, a, \underline{c})$ est solutions d'équations identiques à (28) et (32).

Différentions $\underline{z}$ par rapport à a :

$$\underline{z}_a(t, a, \underline{c}) = F_x \underline{x}_a + F_u \underline{u}_a \quad (33)$$

$$\text{où } F_x = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \text{ et } F_u = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)$$

puis, par rapport à $\underline{c}$:

$$\underline{Z}_c(t, a, \underline{c}) = F_x \underline{X}_c + F_u \underline{U}_c \quad (34)$$

$$\text{où } \underline{X}_c = \left(\frac{\partial x_i}{\partial c_j} \right) \text{ et } \underline{U}_c = \left(\frac{\partial u_i}{\partial c_j} \right)$$

Utilisant (15) et (17), (33) devient :

$$\underline{z}_a = -F_x X_c \underline{f} - F_u U_c \underline{f} \quad (35)$$

$$\text{tandis qu'avec, d'après (34), } Z_c \underline{f} = F_x X_c \underline{f} + F_u U_c \underline{f} \quad (36)$$

$$(35) \text{ et } (36) \text{ impliquent } \underline{z}_a + Z_c \underline{f} (c, r(c, a)) = 0 \quad (37)$$

qui est identique à (28).

Quelle est sa condition initiale ?

$$\text{Par définition } \underline{z}(t, t, \underline{c}) = \underline{f}(\underline{x}(t, t, \underline{c}), \underline{u}(t, t, \underline{c}))$$

$$\text{soit d'après (16) et (18) } \underline{z}(t, t, c) = \underline{f}(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, t)) \text{ cf (32)} \quad (38)$$

Ainsi, (21) est démontrée, en supposant toutefois que la solution de (37) (et de (28)) est unique pour les valeurs de a considérées.

La vérification de (23) est immédiate :

En effet, (16) est valable quel que soit t , et en particulier pour $t = a$

$$\text{Soit : } \underline{x}(a, a, \underline{c}) = \underline{c}$$

$$\text{3-2 Démonstration de (22) et (24) : } -\dot{\underline{\lambda}} = H_x \quad \underline{\lambda}(T) = 0$$

$$\text{Reprenons (25) } \underline{\lambda}_a + \Lambda_c \underline{f}(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, a)) = 0$$

que l'on dérive par rapport à t

$$\dot{\underline{\lambda}}_a + \dot{\Lambda}_c \underline{f}(\underline{c}, \underline{r}(c, a)) = 0 \quad (39)$$

qui constitue la loi de variation de $\dot{\underline{\lambda}}$.

Faisant de même pour (26), on a :

$$\dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) + \underline{\lambda}_2(t, t, c) = \underline{g}_{ct}(c, t) \quad (40)$$

Comme, d'autre part, (25) donne pour $a = t$:

$$\underline{\lambda}_2(t, t, c) = -\Lambda_c \underline{f}(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, t)) \quad (41)$$

(40) fournit la condition initiale de (39) :

$$-\dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) = -\underline{g}_{ct}(\underline{c}, t) - \Lambda_c(t, t, \underline{c}) \underline{f}(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, t)) \quad (42)$$

ou, d'après (26) :

$$-\dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) = -\underline{g}_{ct}(\underline{c}, t) - G_{cc}(\underline{c}, t) \underline{f}(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, t)) \quad (43)$$

$$\text{où } G_{cc} = \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial c_i \partial c_j}$$

Il reste à montrer que le second membre de (22), que nous notons $\underline{w}(t, a, \underline{c})$, est aussi solution de (39) et (43).

$\underline{w}$ s'écrit, rappelant (22) :

$$\underline{w}(t, a, \underline{c}) = \underline{f}_{\underline{o}_x}(\underline{x}, \underline{u}) + \underline{F}_x^T(\underline{x}, \underline{u}) \underline{\lambda}(t, a, \underline{c}) \quad (44)$$

ou, en isolant la composante w_i :

$$w_i = f_{o_{x_i}} + \underline{f}_{\underline{i}_x}^T \underline{\lambda} \quad (45)$$

(45) est dérivée par rapport à a :

$$w_{i_a} = (\underline{f}_{\underline{o}_{x_i}})^T_x \underline{x}_a + (\underline{f}_{\underline{o}_{x_i}})^T_u \underline{u}_a + \underline{f}_{\underline{i}_x}^T \underline{\lambda}_a + \underline{x}_a^T \underline{F}_{i_{xx}}^T \underline{\lambda} + \underline{u}_a^T \underline{F}_{i_{xu}}^T \underline{\lambda} \quad (46)$$

puis, par rapport à c :

$$\underline{w}_{i_c} = \underline{X}_c^T (\underline{f}_{\underline{o}_{x_i}})^T_x + \underline{U}_c^T (\underline{f}_{\underline{o}_{x_i}})^T_u + \underline{X}_c^T \underline{F}_{i_{xx}}^T \underline{\lambda} + \underline{U}_c^T \underline{F}_{i_{xu}}^T \underline{\lambda} + \underline{\Lambda}_c^T \underline{f}_{\underline{i}_x} \quad (47)$$

En utilisant (15) (17) et (25), il est établi que (46) et (47) sont liées par :

$$w_{i_a} + \underline{w}_{i_c}^T \underline{f} = 0 \quad \forall i \quad (48)$$

qui équivaut à :

$$\underline{w}_a + \underline{W}_c \underline{f} = 0 \quad \text{identique à (39)} \quad (49)$$

Calculons sa condition initiale :

Par définition de $\underline{w}(t, a, \underline{c})$, on a :

$$\underline{w}(t, t, \underline{c}) = \underline{f}_{\underline{o}_x}(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, t)) + \underline{F}_x^T(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, t)) \underline{g}_c(c, t) \quad (50)$$

d'après (16) (18) et (26).

D'autre part, pour $a = t$ (11) s'écrit :

$$-g_t(c, t) = \underline{f}_o(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, t)) + \underline{f}^T(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, t)) \underline{g}_c(c, t) \quad (51)$$

que l'on différencie par rapport à $\underline{c}$:

$$-\underline{g}_{t_c} = \underline{f}_{o_c} + \underline{R}_c^T \underline{f}_{o_r} + \underline{F}_c^T \underline{g}_c + \underline{R}_c^T \underline{F}_r^T \underline{g}_c + \underline{G}_{cc}^T \underline{f} \quad (52)$$

$$\text{où } \underline{R}_c = \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \underline{c}_j} \right) \text{ et } \underline{F}_r = \left(\frac{\partial \underline{f}_i}{\partial \underline{u}_j} \right) \underline{u}_j = \underline{r}_j$$

Reportons (52) dans (43) :

$$-\dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) = \underline{f}_{o_c} + \underline{R}_c^T \underline{f}_{o_r} + \underline{F}_c^T \underline{g}_c + \underline{R}_c^T \underline{F}_r^T \underline{g}_c + \underline{G}_{cc}^T \underline{f} - \underline{G}_{cc} \underline{f} \quad (53)$$

Comme $\underline{G}_{cc}$ est, par définition, symétrique, (53) devient :

$$-\dot{\underline{\lambda}}(t, t, \underline{c}) = \underline{f}_{o_c} + \underline{F}_c^T \underline{g}_c + \underline{R}_c^T (\underline{f}_{o_r} + \underline{F}_r^T \underline{g}_c) \quad (54)$$

or, d'après (11), ou bien $\frac{\partial r_j}{\partial c_i} = 0 \quad \forall i$, ou bien $(f_o + f^T g_c)_{r_j} = 0$

de toute manière $R_c^T (f_o + F_r^T g_c) = 0$

$$\text{ainsi, } -\dot{\lambda}(t, t, c) = \underline{f}_o + F_c^T g_c \quad (55)$$

qui est identique à (50).

Les deux membres de (22) sont donc solutions des mêmes équations (39) et (49) munies des mêmes conditions initiales (55) et (50). En supposant a, tel que cette solution soit unique, (22) est vérifié.

La démonstration de (24) ($\underline{\lambda}(T, a, \underline{c}) = 0$) est immédiate.

Pour $t = T$, (25) devient :

$$\underline{\lambda}_a(T, a, \underline{c}) + \Lambda_c(T, a, \underline{c}) \underline{f}(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, a)) = 0 \quad (56)$$

dont la condition initiale, en $a = T$, vaut d'après (26) :

$$\underline{\lambda}(T, T, \underline{c}) = \underline{g}_c(\underline{c}, T) = 0 \quad (57)$$

Si l'équation homogène (56) a une solution unique, cette solution, d'après (57), est $\underline{\lambda}(T, a, \underline{c}) = 0$, qui est (24).

$$3-3 \text{ Démonstration de (19) : } \min_{|w| \leq M} H(\underline{x}, \underline{w}, \underline{\lambda}) = H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda})$$

L'expression de $H(\underline{x}, \underline{w}, \underline{\lambda})$ est :

$$H = f_o(\underline{x}(t, a, \underline{c}), \underline{w}) + \underline{\lambda}^T(t, a, \underline{c}) \underline{f}(\underline{x}(t, a, \underline{c}), \underline{w})$$

où $|\underline{w}| \leq M$

On désire montrer que, quels que soient t , a et $\underline{c}$, le vecteur $\underline{w}$ qui minimise H est $\underline{u} = \underline{u}(t, a, \underline{c})$, solution de (17) et (18).

Dans un premier temps, nous démontrons que :

$$\underline{\lambda}(t, a, \underline{c}) = \underline{g}_x(\underline{x}(t, a, \underline{c}), t) \quad \text{pour } a < t \quad (58)$$

$$\text{Posons } \underline{g}_x(x, t) = \underline{n}(t, a, c) \quad (59)$$

et calculons $\underline{n}_a$ et $N_c = (\frac{\partial n_i}{\partial c_j})$

$$\underline{n}_a = G_{xx} \underline{x}_a \quad (60)$$

$$N_c = G_{xx} X_c \quad (61)$$

$$\underline{n}_a + N_c \underline{f} = G_{xx} (x_a + X_c \underline{f}) \quad (62)$$

$$D'après (15), \underline{n}_a + N_c \underline{f} = 0 \quad (63)$$

qui est identique à l'équation (25) régissant $\lambda(t, a, c)$

De plus, les conditions initiales coïncident également puisque, d'après (26), $\underline{\lambda}(t, t, \underline{c}) = \underline{g}_c(\underline{c}, t)$ cf (58)

L'Hamiltonien peut maintenant être réécrit :

$$H = f_0(\underline{x}(t, a, \underline{c}), \underline{\dot{w}}) + \underline{g}_x^T(\underline{x}(t, a, \underline{c}), t) \underline{f}(\underline{x}, \underline{w}) \quad (64)$$

L'équation (11) stipule que $H = f_0(\underline{c}, \underline{w}) + \underline{f}^T(\underline{c}, \underline{w}) \underline{g}_c(\underline{c}, a)$ est minimisé par $\underline{w} = \underline{r}(\underline{c}, a)$.

Il s'en suit que l'expression (64) de H est minimisée par $\underline{w} = \underline{r}(\underline{x}(t, a, \underline{c}), t)$. Il reste à montrer que $\underline{r}(\underline{x}(t, a, \underline{c}), t) = \underline{u}(t, a, \underline{c})$ (65)

Comme précédemment, calculons $\underline{r}_a$ et R_c :

$$\underline{r}_a = R_x \underline{x}_a \quad (66)$$

$$R_c = R_x X_c \quad (67)$$

$$\text{et } \underline{r}_a + R_c \underline{f} = R_x (\underline{x}_a + X_c \underline{f}) \quad (68)$$

qui, d'après (15), devient :

$$\underline{r}_a + R_c \underline{f} = 0 \quad (69)$$

$\underline{u}(t, a, \underline{c})$ étant solution de la même équation (17), et $\underline{r}(\underline{x}(t, t, \underline{c}), t) = \underline{r}(\underline{c}, t)$ étant égal d'après (18) à $\underline{u}(t, t, \underline{c})$, l'équation (65) est vérifiée.

Ceci termine la démonstration de l'assertion selon laquelle le système de Cauchy (11) (12) (13) (15) (16) (17) (18) constitue une solution du problème à valeurs limites en deux points issu de la théorie de Pontryagin (éq. (19) à (24)).

4 - CONCLUSION -

Le principe de l' "invariant imbedding" constitue un point de vue très attrayant sur le plan théorique. De fait, il est à la base d'une des théories les plus célèbres de l'automatique : la programmation dynamique, dont la résolution numérique offre cependant de grandes difficultés inhérentes à la quantité d'informations à garder en mémoire. On a introduit dans ce chapitre des équations complémentaires d' "invariant imbedding", qui permettent, du moins théoriquement, de déterminer les trajectoires d'un problème d'optimisation en un seul balayage. Sous certaines hypothèses, nous avons montré que ces équations satisfont la théorie de Pontryagin dans le cas où le vecteur de

commande est contraint.

Sur le plan pratique, il subsiste des problèmes de stockage qui nécessitent des algorithmes spécialisés. Cependant, leur application aux systèmes linéaires munis d'un critère quadratique et en présence de contraintes de commande, présente des simplifications notoires, que nous nous proposons d'examiner dans le chapitre II.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. E.S. LEE - Quasilinearization and invariant imbedding - Academic Press 1968.
2. H. KAGIWADA - "Exact Solution of Pontryagin's Equations of Optimal Control"
R. KALABA
Y. THOMAS Journal of Optimization theory and applications - Vol. 5 n°1 - January 1970.
3. R. KALABA - "Invariant imbedding and optimal control theory"
R. SRIDHAR RAND CORPORATION R.M. 5917-PR - March 1969.

Chapitre II

APPLICATION DE L' "INVARIANT IMBEDDING"

A L'OPTIMALISATION QUADRATIQUE

(AVEC CONTRAINTE SUR LA COMMANDE)

Nous avons établi au chapitre précédent un système de Cauchy, solution du problème d'optimisation constitué par des équations d'état de la forme :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (1)$$

$$\text{où } |\underline{u}| \leq M \quad (2)$$

$$\text{et } \underline{x}(a) = \underline{c} \quad a \leq T \quad (3)$$

$$-\infty < c < +\infty$$

et un critère de performance dont le minimum est donné par :

$$g(\underline{c}, a) = \min_{|\underline{u}| \leq M} \int_a^T f_0(\underline{x}, \underline{u}) dt \quad (4)$$

Rappelons, pour référence, les équations obtenues :

$$-g_a(\underline{c}, a) = \min_{|\underline{w}| \leq M} \left[f_0(\underline{c}, \underline{w}) + \underline{f}^T(\underline{c}, \underline{w}) g_{\underline{c}}(\underline{c}, a) \right] \quad (5)$$

$$g(\underline{c}, T) = 0 \quad (6)$$

$$\underline{w}_{\min} = r(\underline{c}, a) \quad (7)$$

$$\underline{x}_a(t, a, \underline{c}) + X_c(t, a, \underline{c}) \underline{f}(\underline{c}, r(\underline{c}, a)) = 0 \quad (8)$$

$$X_c = \left(\frac{\partial x_i}{\partial c_j} \right)$$

$$\underline{x}(t, t, \underline{c}) = \underline{c} \quad (9)$$

$$\underline{u}_a(t, a, \underline{c}) + U_c(t, a, \underline{c}) \underline{f}(\underline{c}, r(\underline{c}, a)) = 0 \quad (10)$$

$$U_c = \left(\frac{\partial u_i}{\partial c_j} \right)$$

$$\underline{u}(t, t, \underline{c}) = \underline{r}(\underline{c}, t) \quad (11)$$

Il est possible de compléter par les lois de variations du vecteur adjoint utilisé par Pontryagin :

$$\underline{\lambda}_a(t, a, \underline{c}) + \Lambda_c(t, a, \underline{c}) \underline{f}(\underline{c}, \underline{r}(\underline{c}, a)) = 0 \quad (12)$$

$$\Lambda_c = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial c_j} \right)$$

$$\underline{\lambda}(t, t, \underline{c}) = g_{\underline{c}}(\underline{c}, t) \quad (13)$$

Ayant montré dans la première partie l'intérêt que présente l'emploi des critères quadratiques en régulation, il nous paraît important de pouvoir établir, dans ce cas, un algorithme simplifié par rapport à la résolution des équations (5) à (11). Il est d'ailleurs bien connu que l'équation (5) de programmation dynamique se réduit à un système différentiel ordinaire de Riccati lorsque $\underline{f}$ est linéaire en $\underline{x}$ et $\underline{u}$ et f_0 quadratique. On peut donc s'attendre à de semblables simplifications pour les équations (8) et (10) et à la possibilité de mettre en oeuvre une stratégie d'intérêt pratique en présence de contraintes telles que (2).

Le résultat auquel nous sommes parvenus concerne le cas unidimensionnel en u et permet, en un seul balayage, d'obtenir les trajectoires optimales d'état et de commande quels que soient $\underline{c}$ et $a \leq T$.

Il nous paraît souhaitable de procéder par étapes et de commencer par un exemple élémentaire, qui peut être traité analytiquement. C'est à partir de cet exemple que l'algorithme est établi puis généralisé. Quelques résultats numériques terminent ce chapitre.

1 - UN EXEMPLE ELEMENTAIRE -

Soit le processus intégrateur :

$$\dot{x} = u \quad (14)$$

avec $|u| \leq 1$ (15)

démarrant en $x(a) = c$ (16)

On recherche les trajectoires optimales issues de c qui minimisent :

$$J = \frac{1}{2} \int_a^T (x^2 + u^2) dt \quad (17)$$

On note donc :

$$g(c, a) = \min_{|u| \leq 1} \int_a^T (x^2 + u^2) dt \quad (18)$$

Il n'est d'abord pas sans intérêt de résoudre analytiquement cet exemple à la fois par le principe du Minimum et par l'"invariant imbedding" : ceci permet de mettre en lumière les rapports entre les deux méthodes.

1-1 Traitement analytique par le principe du Minimum :

$$\text{L'Hamiltonien s'écrit : } H = \frac{1}{2} (x^2 + u^2) + \lambda u \quad (19)$$

Rappelons l'énoncé du principe du Minimum :

$$\min_{|w| \leq 1} H(x, w, \lambda) = H(x, u, \lambda) \quad (20)$$

avec λ solution de :

$$\dot{\lambda} = -x \quad (21)$$

$$\text{et } \lambda(T) = 0 \quad (22)$$

Si $u(t, a, c)$ n'atteint pas sa butée sur $t \in [a, T]$, la solution est donnée par (14) (16) (21) et (22) avec $u = -\lambda$ (20)

Soient :

$$u(t, a, c) = c \frac{\text{sh}(t - T)}{\text{ch}(a - T)} \quad (23)$$

$$x(t, a, c) = c \frac{\text{ch}(t - T)}{\text{ch}(a - T)} \quad (24)$$

$$\lambda(t, a, c) = -u(t, a, c) \quad (25)$$

L'allure de la commande est indiquée figure 1 ($c < 0$) : elle implique, si u atteint la butée, une trajectoire en pointillés dont la forme était intuitivement prévisible.

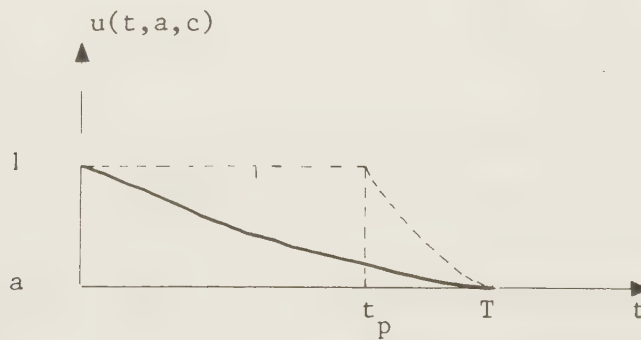


Figure 1

Si donc u atteint la valeur 1 (le cas $c > 0$ est symétrique), (23) (24) et (25) deviennent :

$$- a \leq t \leq t_p$$

$$u(t, a, c) = 1 \quad (26)$$

$$x(t, a, c) = t - a + c \quad (27)$$

$$\lambda(t, a, c) = -1 - (c - a) (t - t_p) - \frac{1}{2} (t^2 - t_p^2) \quad (28)$$

$$- \quad t_p \leq t \leq T$$

$$u(t, a, c) = (t_p - a + c) \frac{\text{sh}(t - T)}{\text{ch}(t_p - T)} \quad (29)$$

$$x(t, a, c) = (t_p - a + c) \frac{\text{ch}(t - T)}{\text{ch}(t_p - T)} \quad (30)$$

$$\lambda(t, a, c) = -y(t, a, c) \quad (31)$$

t_p est donné par la relation :

$$(t_p - a + c) \text{th}(t_p - T) = 1 \quad (32)$$

1-2 Traitement analytique par l'"Invariant Imbedding" :

1-2-1 Supposons $|u(t, a, c)| < 1 \quad \forall t \in (a, T)$

$$(5) \text{ et } (7) \text{ impliquent } r(a, c) = -g_c(c, a) \quad (33)$$

$$(5) \text{ devient } -g_a(c, a) = \frac{1}{2} [c^2 - g_c^2(c, a)] \quad (34)$$

dont la solution peut s'écrire :

$$g(c, a) = \frac{1}{2} k(a) c^2 \quad (35)$$

$$\text{d'après (33) } r(a, c) = -k(a) c \quad (36)$$

$$\text{avec } k_a(a) = k^2(a) - 1 \quad (37)$$

$$k(T) = 0 \quad (38)$$

$$\text{d'où } r(c, a) = c \text{th}(a - T) \quad (39)$$

(8) et (9) donnent :

$$x_a(t, a, c) + c \text{th}(a - T) x_c(t, a, c) = 0 \quad (40)$$

$$x(t, t, c) = c \quad (41)$$

dont les caractéristiques s'écrivent :

$$\frac{da}{1} = \frac{dc}{c \text{th}(a - T)} = \frac{dx}{0} \quad (42)$$

$$\text{soient } x = h_1, \frac{c}{\text{ch}(a - T)} = h_2 \quad (43)$$

$$\text{donc } x(t, a, c) = \phi \left(\frac{c}{\text{ch}(a - T)} \right) \text{ avec } x(t, t, c) = c \quad (44)$$

$$\text{finalement } x(t, a, c) = c \frac{\text{ch}(t - T)}{\text{ch}(a - T)} \quad (45)$$

qui est (24).

$$\text{D'après (7) } u(t, a, c) = r(x(t, a, c), t) \quad (46)$$

$$\text{soit d'après (39) et (45) } u(t, a, c) = c \frac{\text{sh}(t - T)}{\text{ch}(a - T)} \quad (47)$$

$$a) \ a \leq a_p \leq t \leq T$$

$$(52) \text{ donne } x(t, a, c) = x(t, a_p, c_p) \quad (54)$$

$$\text{et } c_p - c = a_p - a \quad (55)$$

$$\text{or, d'après (45) } x(t, a_p, c_p) = c_p \frac{\text{ch}(t - T)}{\text{ch}(a_p - T)} \quad (56)$$

ce qui donne d'après (54) et (55) :

$$x(t, a, c) = (c + a_p - a) \frac{\text{ch}(t - T)}{\text{ch}(a_p - T)} \quad (57)$$

avec (53) corrigé par (55) :

$$(c + a_p - a) \text{th}(a_p - T) = 1 \quad (58)$$

(57) et (58) équivalent à (30) et (32).

Un raisonnement identique pour $u(t, a, c)$ et $\lambda(t, a, c)$ permet de retrouver (29) et (31).

$$b) \ a \leq t \leq a_p \leq T$$

On suppose que la caractéristique issue de (a, c) passe par (t, c_o)

$$(52) \text{ donne } x(t, a, c) = x(t, t, c_o) \quad (59)$$

$$\text{et } c_o - c = t - a \quad (60)$$

Donc, d'après (9) :

$$x(t, a, c) = t - a + c \quad (61)$$

qui est (27).

Bien entendu $u(t, a, c) = 1$ (26)

Pour λ , on a aussi d'après (52) et (13) :

$$\lambda(t, a, c) = g_c(c_o, t) \quad (62)$$

$$\text{avec } c_o - c = t - a \quad (63)$$

Il reste à calculer $g_c(c_o, t)$
sur les caractéristiques, (5) devient :

$$g_a + g_c = -\frac{1}{2} (c^2 + 1) \quad (64)$$

Différentiant par rapport à c :

$$g_{ac} + g_{cc} = -c \quad (65)$$

ou encore, puisque $da = dc$ sur les caractéristiques :

$$dg_c(c, a) = -c \, dc \quad (66)$$

que l'on peut intégrer entre (c_o, t) et (c_p, a_p) ,

$$\text{soit } g_c(c_p, a_p) - g_c(c_o, t) = \frac{c_o^2}{2} - \frac{c_p^2}{2} \quad (67)$$

$$\text{or } r(a_p, c_p) \stackrel{(33)}{=} -f_c(c_p, a_p) \stackrel{(53)}{=} 1 \quad (68)$$

$$\text{Donc, } g_c(c_o, t) = -1 + \frac{c_p^2}{2} - \frac{c_o^2}{2} \quad (69)$$

et puisque les caractéristiques peuvent s'écrire :

$$c_o = c + t - a \quad (70)$$

$$\text{et } c_p = c + a_p - a \quad (71)$$

$$g_c(c_o, t) \stackrel{(71)}{=} -1 - (c - a)(t - a_p) - \frac{1}{2}(t^2 - a_p^2) \quad (72)$$

qui est (28).

1-3 Recherche d'une stratégie :

Au lieu de résoudre analytiquement les équations d'"invariant imbedding", il est possible d'obtenir un système algébrodifférentiel fournissant la solution sous forme d'algorithme.

Revenons par exemple au cas où $u(t, a, c)$ n'atteint pas la butée.

$$r(a, c) = -k(a) c \quad (36)$$

$$\text{avec } \begin{cases} k_a(a) = k^2(a) - 1 \quad (37) \\ k(T) = 0 \quad (38) \end{cases}$$

k est donc intégré à rebours de T à a , l'équation (40) s'écrit aussi :

$$x_a(t, a, c) - k(a)c x_c(t, a, c) = 0 \quad (73)$$

on aurait pu poser

$$x(t, a, c) = \omega(a) \cdot c \quad (74)$$

ce qui implique d'après (73)

$$\omega_a(a) - k(a) \omega(a) = 0 \quad (75)$$

$$\omega(t) = 1 \quad (76)$$

lorsque $a = t$, on adjoint à (37) l'équation (75) avec la condition initiale (76) et pour toute valeur de a inférieure ou égale à t : $x(t, a, c) = \omega(a)c$

De même, les équations (10) et (11) s'écrivent :

$$u_a(t, a, c) - k(a)c u_c(t, a, c) = 0 \quad (77)$$

$$u(t, t, c) = -k(t)c \quad (78)$$

$$\text{Posons } u(t, a, c) = h(a)c \quad (79)$$

(77) et (78) donnent :

$$h_a(a) - k(a) h(a) = 0 \quad (80)$$

$$h(t) = -k(t) \quad (81)$$

Si on désire avoir également $u(t,a,c)$ pour $a \leq t$, l'équation (80) avec la condition initiale (81) est adjointe à (37).

$$\text{Remarquons que dans ce cas simple, } \lambda(t,a,c) = -h(a)c \quad (82)$$

Si $u(a,a,c) = 1$, il est possible d'envisager une stratégie similaire.

Supposons d'abord :

$$a) \ a \leq a_p \leq t \leq T$$

l'équation (57) peut s'écrire :

$$x(t,a,c) = (c + a_p - a) \omega(a_p) \quad (83)$$

$$\text{avec } (c + a_p - a) k(a_p) = 1 \quad (84)$$

En même temps que l'on intègre $\omega(a)$ et $k(a)$, on élabore :

$$\phi(\alpha) = (c + \alpha - a) k(\alpha) \quad (85)$$

qui donne $\alpha = a_p$ quand $\phi(\alpha) = 1$; on a alors $x(t,a,c)$ à l'aide de (83).

De même (29) et (31) s'écrivent :

$$u(t,a,c) = (c + a_p - a) h(a_p) \quad (86)$$

$$\lambda(t,a,c) = - (c + a_p - a) h(a_p) \quad (87)$$

$$b) \ a \leq t \leq a_p \leq T$$

Si la solution de (85) $|t, T|$

$$x(t,a,c) = (t - a + c) \quad \text{cf. (61)} \quad (88)$$

$$u(t,a,c) = 1 \quad \text{cf. (26)} \quad (89)$$

$$\lambda(t,a,c) = -1 - (c - a) (t - a_p) - \frac{1}{2} (t^2 - a_p^2) \quad \text{cf. (73)} \quad (90)$$

En résumé, $k(a)$ est intégré de T à a ((37), (38)) puis, simultanément $\omega(a)$ ((75), (76)) et $h(a)$ ((80), (81)) sont intégrés de t à a

$$\phi(\alpha) = 1 \quad (85) \text{ fournit } a_p$$

trois cas peuvent alors se présenter (voir tableau, horizontalement)

	$a_p \notin [a, T]$	$a_p \in [a, t]$	$a_p \in [t, T]$
$x(t,a,c)$	$\omega(a)c$	$(c + a_p - a) \omega(a_p)$	$c + t - a$
$u(t,a,c)$	$h(a)c$	$(c + a_p - a) h(a_p)$	1
$\lambda(t,a,c)$	$-h(a)c$	$-(c + a_p - a) h(a_p)$	$-1 - (c - a) (t - a_p) - \frac{1}{2} (t^2 - a_p^2)$

2 - UNE STRATEGIE D'OPTIMALISATION PAR CRITERE QUADRATIQUE OBTENUE PAR LES EQUATIONS D' "INVARIANT IMBEDDING" (commande bornée) -

Abandonnant maintenant l'étude des relations de la méthode proposée ici avec le principe du Minimum, nous réécrivons les équations d'"invariant imbedding" pour le cas où $\underline{x}$ est un vecteur (critère quadratique - système linéaire), et établissons un algorithme fournissant les trajectoires optimales correspondant à une commande bornée.

Les équations (4) à (11) deviennent respectivement :

$$g(\underline{c}, a) = \min_{|\underline{u}| \leq 1} \frac{1}{2} \int_a^T (\underline{x}^T Q \underline{x} + \alpha^2 u^2) dt \quad (91)$$

$$- g_a(\underline{c}, a) = \min_{|\underline{w}| \leq 1} \left[\frac{1}{2} \underline{c}^T Q \underline{c} + \frac{1}{2} \alpha^2 w^2 + (A \underline{c} + \underline{b} w)^T g_{\underline{c}}(\underline{c}, a) \right] \quad (92)$$

$$g(\underline{c}, T) = 0 \quad (93)$$

$$w_{\min} = r(a, \underline{c}) \quad (94)$$

$$\underline{x}_a(t, a, \underline{c}) + X_c(A \underline{c} + \underline{b} r) = 0 \quad (95)$$

$$\underline{x}(t, t, \underline{c}) = \underline{c} \quad (96)$$

$$\underline{u}_a(t, a, \underline{c}) + \underline{u}_{\underline{c}}^T(A \underline{c} + \underline{b} r) = 0 \quad (97)$$

$$\underline{u}(t, t, \underline{c}) = r(t, \underline{c}) \quad (98)$$

Comme précédemment, nous distinguerons deux possibilités :

2-1 $\underline{u}(t, a, \underline{c})$ n'atteint pas la butée $\forall t \in [a, T]$

$$(92) \text{ donne } r(a, \underline{c}) = - \frac{1}{\alpha^2} \underline{b}^T g_{\underline{c}} \quad (99)$$

(92) devient :

$$- f_a(\underline{c}, a) = \frac{1}{2} \underline{c}^T Q \underline{c} - \frac{1}{2 \alpha^2} (\underline{b}^T g_{\underline{c}})^2 + \underline{c}^T A^T g_{\underline{c}}(\underline{c}, a) \quad (100)$$

$$\text{Posons } g(\underline{c}, a) = \frac{1}{2} \underline{c}^T K(a) \underline{c} \quad (101)$$

(100) devient :

$$- K_a(a) = Q - \frac{1}{\alpha^2} K^T \underline{b} \underline{b}^T K + A^T K + K A \quad (102)$$

avec la condition initiale due à (101) et (93).

$$K(T) = 0 \quad (103)$$

$$(99) \text{ devient } r(a, \underline{c}) = - \frac{1}{\alpha^2} \underline{b}^T K(a) \underline{c} \quad (104)$$

Calculons $\underline{x}(t, a, \underline{c})$:

$$(95) \text{ s'écrit } \underline{x}_a(t, a, \underline{c}) + X_c(A \underline{c} - \frac{1}{\alpha^2} \underline{b} \underline{b}^T K(a) \underline{c}) \quad (105)$$

$$\text{Posant } \underline{x}(t, a, \underline{c}) = \Omega(a) \underline{c} \quad \Omega = \text{matrice} \quad (106)$$

$$\text{on a } \Omega'(a) = -\Omega(a) \left[A - \frac{1}{\alpha^2} \underline{b} \underline{b}^T K(a) \right] \quad (107)$$

$$\text{avec } \Omega(t) = I \quad \text{d'après (96) et (106)} \quad (108)$$

De même, nous obtenons $u(t, a, \underline{c})$ à l'aide de (97) (104) (98) et en posant :

$$u(t, a, \underline{c}) = \underline{h}^T(a) \underline{c} \quad (109)$$

$$\underline{h}'(a) = - \left(A^T - \frac{1}{\alpha^2} K^T \underline{b} \underline{b}^T \right) \underline{h}(a) \quad (110)$$

$$\text{et } \underline{h}(t) = - \frac{1}{\alpha^2} K^T(t) \underline{b} \quad (111)$$

Pour obtenir $\underline{x}(t, a, \underline{c})$ et $u(t, a, \underline{c})$ on intègre (102) de T à a , (107) et (110) de t à a . $\underline{x}(t, a, \underline{c})$ et $u(t, a, \underline{c})$ sont alors donnés par (106) et (109).

$$2-2 \quad u(a, a, \underline{c}) = +1 \quad (\text{le cas } -1 \text{ est symétrique})$$

Comme précédemment, des considérations physiques nous laissent supposer que si la commande $u(t)$ atteint la butée, elle le fait dès le départ. De toutes façons, cette hypothèse est vérifiée pour le but recherché ici plus ou moins explicitement : obtenir un catalogue de réponses indicielles du système optimal.

$$\text{Soit } a_p \text{ tel que } r(a_p, \underline{c}_p) = 1$$

$$\text{Soit } - \frac{1}{\alpha^2} \underline{b}^T K(a_p) \underline{c}_p = 1 \quad (112)$$

qui fournit a_p si $\underline{c}_p$ est donné.

$$2-2-1 \quad a \leq a_p \leq t < T$$

Pour $r(a, \underline{c}) = 1$, (95) devient :

$$\underline{x}_a(t, a, \underline{c}) + X_c(t, a, \underline{c}) (\underline{A}c + \underline{b}) = 0 \quad (113)$$

dont les caractéristiques sont :

$$\underline{x}(t, a, \underline{c}) = \text{Cte pour } \underline{c}_a = \underline{A}c + \underline{b} \quad (114)$$

$$\text{qui est analogue de } \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{b} \quad (115)$$

soit $\phi(t, \tau)$ la matrice de transition de $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}$

Les homologues de (55) et (60) sont :

$$\underline{c}_p = \phi(a_p, a) \underline{c} + \int_a^{a_p} \phi(a_p, \alpha) \underline{b} d\alpha \quad (116)$$

$$\underline{c}_0 = \phi(t, a) \underline{c} + \int_a^t \phi(t, \alpha) \underline{b} d\alpha \quad (117)$$

$$\text{d'après (114)} \quad \underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{x}(t, a_p, \underline{c}_p) \text{ sur les caractéristiques} \quad (118)$$

$$\text{d'après (106)} \quad \underline{x}(t, a, \underline{c}) = \Omega(a_p) \underline{c}_p \text{ avec } \underline{c}_p \text{ donné par (116)} \quad (119)$$

Calculons $u(t, a, \underline{c})$:

$$(97) \text{ s'écrit } u_a(t, a, \underline{c}) + u_{\underline{c}}^T(t, a, \underline{c}) (\underline{A}\underline{c} + \underline{b}) = 0 \quad (120)$$

dont les caractéristiques sont :

$$u(t, a, \underline{c}) = \text{Cte pour } \underline{c}_a = \underline{A}\underline{c} + \underline{b} \quad (121)$$

qui est équivalente à (114)

$$\text{Donc } u(t, a, \underline{c}) = u(t, a_p, \underline{c}_p) = \underline{h}^T(a_p) \underline{c}_p \quad (122)$$

avec $\underline{c}_p$ donné par (116)

$$\begin{array}{c} 2-2-2 \quad a \leq t \leq t_p \leq T \\ \hline u(t, a, \underline{c}) = 1 \end{array} \quad (123)$$

$$\text{D'après (114)} \quad \underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{x}(t, t, \underline{c}_0) \quad (124)$$

$$\text{D'après (96)} \quad \underline{x}(t, a, \underline{c}) = \underline{c}_0 \quad (125)$$

$\underline{c}_0$ étant donné par (117)

En définitive, voici l'algorithme complet pour la détermination des trajectoires optimales d'un système d'équation $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u$ muni d'un critère quadratique $\frac{1}{2} \int_a^T (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \alpha^2 u^2) dt$; où $\underline{x}(a) = \underline{c}$ et $|u| \leq 1$.

Le système de Riccati - $K_a(a) = \underline{Q} - \frac{1}{\alpha^2} K^T \underline{b} \underline{b}^T K + A^T K + KA$ est intégré à rebours de $T(K(T) = 0)$ à a_0 .

A chaque instant t , où l'on désire avoir un point des trajectoires optimales $\underline{x}^*(t, a_0, \underline{c})$ et $u^*(t, a_0, \underline{c})$, on adjoint à l'intégration de K , celles de Ω et $\underline{h}$:

$$\Omega_a(a) = -\Omega(a) \left[A - \frac{1}{\alpha^2} \underline{b} \underline{b}^T K(a) \right]$$

$$\underline{h}_a(a) = - \left[A^T - \frac{1}{\alpha^2} K^T \underline{b} \underline{b}^T \right] \underline{h}(a)$$

avec les conditions initiales $\Omega(t) = I$, $\underline{h}(t) = \frac{1}{\alpha^2} K^T(t) \underline{b}$.

Pendant cette intégration, l'expression algébrique :

$n(a) = -\frac{1}{\alpha^2} \underline{b}^T K(a) \left[\phi(a, a_0) \underline{c} + \int_{a_0}^a \phi(a, \mu) \underline{b} d\mu \right]$ est calculée - (notons c_p le crochet).

$(\phi(t, \tau))$ est la matrice de transition de $\dot{\underline{z}} = \underline{A}\underline{z}$

Soit a_p la valeur de a pour laquelle $n(a_p, \underline{c}) = 1$

En fonction de la position de $a_p(\underline{c})$ par rapport à a_0, t et T , $\underline{x}(t, a_0, \underline{c})$ et $u(t, a_0, \underline{c})$ sont donnés par le tableau ci-après.

si $\rightarrow$	$a_p \notin [a_o, T]$	$a_p \in [a_o, t]$	$a_p \in [t, T]$
$\underline{x}(t, a_o, \underline{c})$	$\Omega(a_o) \underline{c}$	$\Omega(a_p) \underline{c}_p$	$\phi(t, a_o) \underline{c} + \int_{a_o}^t \phi(t, \alpha) \underline{b} \, d\alpha$
$u(t, a_o, \underline{c})$	$\underline{h}^T(a_o) \underline{c}$	$\underline{h}^T(a_p) \underline{c}_p$	1

Remarque : Lors de l'étude de réponses indicielles par exemple, a_o est généralement fixé tandis que $\underline{c} = \underline{x}(a_o)$ peut être variable. Ceci explique nos notations qui pourraient apparaître non homogènes.

3 - RESULTATS NUMERIQUES -

Les intégrations de K , Ω et h sont effectuées à l'aide d'un programme IBM 360 intitulé HPCG utilisant une méthode du type Adams-Moulton (cf chapitre 3, 1ère partie).

La figure (3) représente une trajectoire optimale d'un système possédant deux constantes de temps 20 et 30 sec:

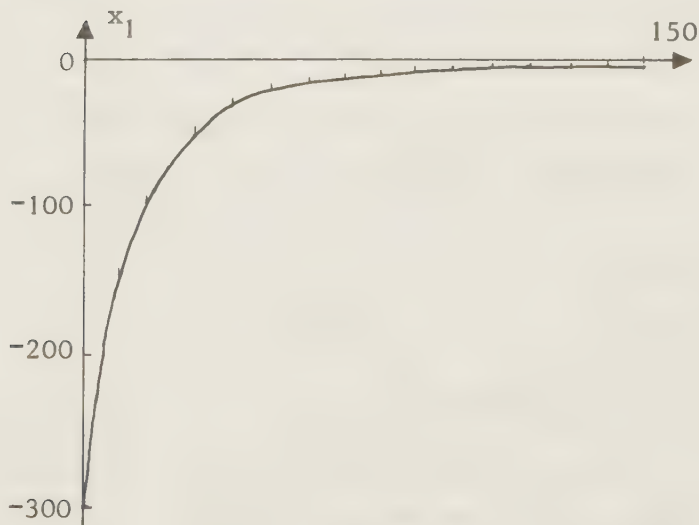
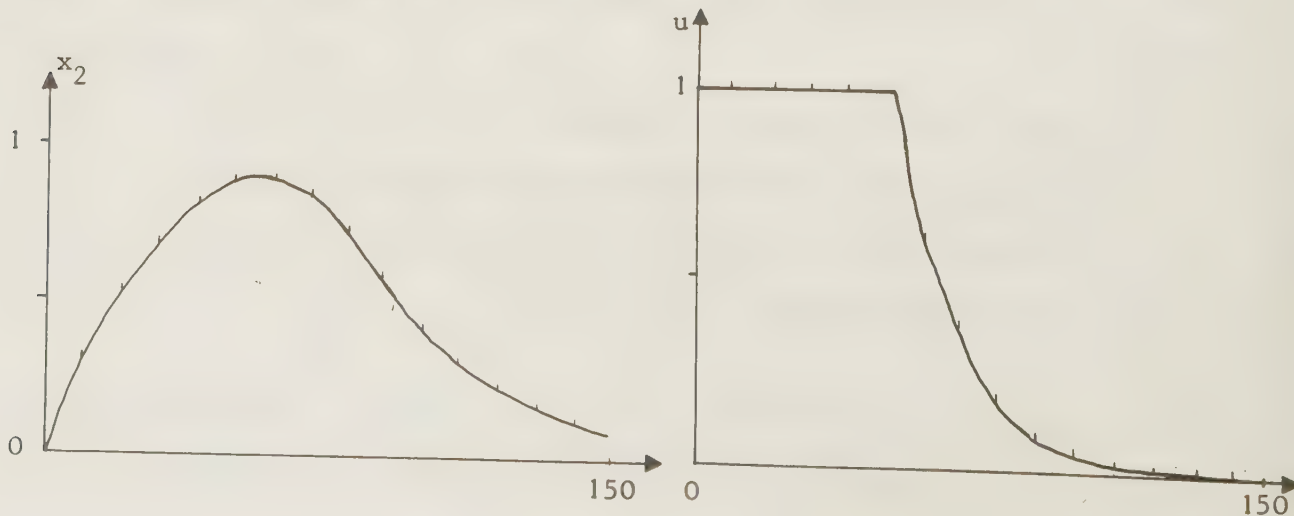


Fig. (3)



4 - CONCLUSION -

Au même titre qu'en régulation classique, où souvent on établit, en simulation, un catalogue des réponses indicielles d'un système bouclé en fonction des coefficients du régulateur, il est également intéressant de disposer d'algorithmes de calcul "hors ligne" des systèmes optimaux.

Dans ce chapitre, une application du principe d' "Invariant Imbedding" a été présentée, qui permet de déterminer les trajectoires optimales de commande et d'état d'un système linéaire muni d'un critère quadratique et dont la commande est soumise à saturations.

La caractéristique fondamentale de l'algorithme est de ne nécessiter qu'un seul balayage (une intégration) pour établir le catalogue souhaité. L'importance de la mémoire indispensable au calcul est liée à l'ordre du système et au nombre de points désirés par trajectoire.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

- | | |
|-----------|---|
| D. SARLAT | - "Obtention à l'aide de l' "invariant imbedding" d'une commande optimale contrainte" |
| Y. THOMAS | Annales E.N.S.M. - Premier semestre 1970. |

Chapitre III

THEORIES VARIATIONNELLES : PROBLEMES A COMMANDE ET ETAT CONTRAINTS

Nous venons de voir que l'utilisation des principes d'optimalité et d' "invariant imbedding" permet d'obtenir en un seul "balayage" un "catalogue" des réponses optimales d'un processus pour des états initiaux et des périodes d'optimisation variables. Notamment, pour des systèmes linéaires munis de critère quadratique, les algorithmes se réduisent à l'intégration de systèmes différentiels ordinaires. Cependant, des difficultés importantes apparaissent si l'évolution de l'état est tenue de respecter certaines contraintes : la résolution d'un système aux dérivées partielles est nécessaire. A fortiori, dans ce cas, ces méthodes deviennent impossibles à convertir en algorithmes "en ligne", que souhaitent généralement obtenir les automaticiens.

Fondées sur un point de vue totalement différent, les méthodes variationnelles permettent également le traitement théorique de l'optimisation dynamique fonctionnelle. Il en résulte des conditions d'optimalité nécessitant la résolution de systèmes différentiels dont les conditions aux limites sont imposées en plusieurs points.

Ce chapitre est ainsi consacré entièrement à l'aspect théorique des méthodes variationnelles et à l'obtention des conditions nécessaires d'optimalité tandis que le suivant traitera des différents algorithmes analogiques, numériques et hybrides de résolution des problèmes à valeurs limites en plusieurs points.

Par opposition à la programmation dynamique et à l' "invariant imbedding" qui ont été développés lors des deux dernières décennies, les méthodes variationnelles ont été étudiées depuis près de trois siècles. Cependant, leur application à l'automatique n'ayant été évidemment envisagée que récemment, ce n'est que depuis fort peu de temps que des étapes importantes ont été parcourues.

Deux types de recherche ont particulièrement marqué celles-ci, et feront l'objet des deux premiers paragraphes du présent chapitre :

- les résultats de Pontryagin concernant le cas où la commande évolue dans un domaine fermé et qui généralisent les théories de Weierstrass sur les extremums forts, prolongés entre 1935 et 1960 par Mac Shane et Hestenes.

- l'extension du calcul des variations au cas où l'état est contraint.

Une fois de plus, on a volontairement évité une grande rigueur mathématique dans un souci de simplicité et de clarté de la présentation.

Un dernier paragraphe est consacré à l'application de ces théories aux systèmes linéaires munis du critère quadratique développé dans la première partie. Ce problème servira de banc d'essai aux algorithmes établis dans le chapitre suivant.

1 - CALCUL DES VARIATIONS ET PRINCIPE DU MINIMUM -

1-1 Calcul différentiel et calcul des variations :

Considérons la formulation d'un problème de commande optimale dont l'état initial est donné et dont l'état final est libre.

Le processus est régi par :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \quad (1)$$

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (2)$$

et le critère à minimaliser s'écrit:

$$J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_0 + T} f_0(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) dt \quad (3)$$

T fixé

$f_0, \underline{f}, \underline{f}_0, F_x$, sont continues en $\underline{x}$ et $\underline{u}$

Reprenant le point de vue développé en introduction (§ 2-2-2), nous rappelons la marche suivie pour déterminer les conditions nécessaires fournissant le minimum d'une fonction $k(\underline{x})$, dont la variable $\underline{x}$ est soumise à des contraintes $\underline{g}(\underline{x}) = 0$ (4)

Les contraintes sont d'abord adjointes à la fonction k à l'aide de multiplicateurs de Lagrange pour former l'hamiltonien :

$$H(\underline{x}) = k(\underline{x}) + \underline{\lambda}^T \underline{g}(\underline{x}) \quad (5)$$

Remarquons que si $\underline{x}$ vérifie les contraintes, $H = k$. Ainsi, minimiser k et minimaliser H sont équivalents.

Par analogie, le problème d'optimisation ((1) à (3)) peut être reposé en adjoignant les contraintes (1) à f_0 .

$$\text{Soit } J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_0 + T} [f_0(\underline{x}, \underline{u}) + \underline{\lambda}^T(t) (\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}})] dt \quad (6)$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont devenus des fonctions de temps puisque la variable $\underline{x}$ de la fonction k est devenue une fonction du temps $\underline{u}(t)$

de la fonctionnelle J.

En introduisant l'hamiltonien défini par $H = f_0 + \underline{\lambda}^T(t) \underline{f}$,

$$J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_0+T} [H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}) - \underline{\lambda}^T(t) \dot{\underline{x}}] dt \quad (7)$$

La seconde étape vers la minimalisation de k consiste à calculer l'accroissement de la fonction H correspondant à un accroissement de la variable $\underline{x} = \underline{x}^* + d\underline{x}$ autour de l'optimum $\underline{x}^*$ (en supposant $\underline{g}(\underline{x}^*) = 0$)

$$\text{Soit } dH = (k_{\underline{x}}(\underline{x}^*) + G_{\underline{x}}(\underline{x}^*) \underline{\lambda})^T d\underline{x} \quad (8)$$

$$G_{\underline{x}} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)$$

en négligeant les termes d'ordre 2.

Pour l'établissement d'une condition nécessaire, on écrit que $dH(\underline{x}^*) \geq 0$ pour toute variation $d\underline{x}$ telle que $\underline{g}(\underline{x}^* + d\underline{x}) = 0$.

Comme $\underline{x}$ est régi par des contraintes égalité, il est toujours possible de trouver deux valeurs de $d\underline{x}$ ($d\underline{x}_1$ et $d\underline{x}_2$) telles que $dH(\underline{x}^* + d\underline{x}_1)$ et $dH(\underline{x}^* + d\underline{x}_2)$ aient des signes différents, à moins que $k_{\underline{x}}(\underline{x}^*) + G_{\underline{x}}(\underline{x}^*) \underline{\lambda} = 0$ (9) ce qui constitue une condition nécessaire de minimum de k.

Les conditions d'optimalité sont donc (9) et (4).

$$\text{De plus : la différentielle } dH(\underline{x}^*) = 0 \quad (10)$$

A la différentielle d H due à l'accroissement $d\underline{x}$, correspond pour le problème (7), une variation δJ due à des variations $\delta \underline{u}(t)$, et donc $\delta \underline{x}(t)$.

δJ est appelée première variation car, par analogie avec d H, on ne tient compte dans son calcul que des variations du premier ordre en $\delta \underline{u}$ et $\delta \underline{x}$.

Calculons δJ , par analogie avec le formalisme du calcul différentiel :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_0+T} (H_{\underline{x}}^T \delta \underline{x} + H_{\underline{u}}^T \delta \underline{u} - \underline{\lambda}^T \delta \dot{\underline{x}}) dt \quad (11)$$

ou, après intégration par partie du dernier terme :

$$\delta J = - \underline{\lambda}^T(t_0 + T) \delta \underline{x}(t_0 + T) + \int_{t_0}^{t_0+T} [(\underline{H}_{\underline{x}}^T + \dot{\underline{\lambda}}^T) \delta \underline{x} + H_{\underline{u}}^T \delta \underline{u}] dt \quad (12)$$

La condition nécessaire d'optimalité est ici aussi obtenue en écrivant que $\delta J(\underline{u}^*(t)) \geq 0$ quel que soit $\delta \underline{u}(t)$ pour $t \in [t_0, t_0 + T]$, si $\underline{\lambda}(t)$ est choisi tel que :

$$\dot{\underline{\lambda}} = - \underline{H}_{\underline{x}} \quad \text{équations Euler, mises sous la} \quad (13)$$

$$\underline{\lambda}(t_0 + T) = 0 \quad \text{forme canonique de Hamilton.} \quad (14)$$

$$\alpha \delta J(\underline{u}^*) = \int_{t_0}^{t_0+T} \underline{H}_{\underline{u}}^T \delta \underline{u} dt \quad (15)$$

$$\text{il est encore } \int_{t_0}^{t_0+T} \delta H dt \quad (16)$$

$$\text{où } \delta H = H(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{u}^* + \delta \underline{u}) - H(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{u}^*) \quad (17)$$

Comme il est toujours possible de trouver 2 fonctions $\delta \underline{u}(t)$ fournissant des signes différents pour les δJ correspondant, on n'aura $\delta J(\underline{u}^*) \geq 0$ que si $\underline{H}_{\underline{u}} = 0$ (18)

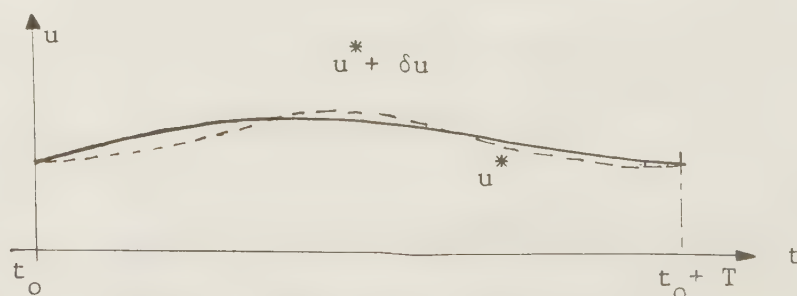
et donc $\delta J(\underline{u}^*) = 0$ cf. (10) (19)

Les équations (1) (2) (13) (14) et (18) constituent les conditions d'optimalité du problème ((1) à (3)).

Par une sorte d'analogie avec le calcul différentiel, le calcul des variations se présente donc très simplement. Cependant une difficulté nouvelle y apparaît : si l'accroissement infiniment petit ou le voisinage entre deux variables n'offre aucune ambiguïté, il n'en est pas de même lorsque ces variables deviennent des fonctions. C'est pourquoi les spécialistes utilisent les termes d'extremum faible et d'extremum fort.

1-2 Extremums faible et fort - Principe du Minimum

Les études variationnelles ont longtemps porté sur la recherche d'extremums faibles (Euler - Lagrange - Legendre). Autrement dit, les "courbes variées" $\underline{u}^* + \delta \underline{u}$ et $\underline{x}^* + \delta \underline{x}$ étaient non seulement supposées situées au voisinage de $\underline{u}^*$ et de $\underline{x}^*$, mais les dérivées $\delta \dot{\underline{u}}$ et $\delta \dot{\underline{x}}$ étaient, elles aussi, de petite amplitude (cf. fig. 1).



"Voisinage faible"

Fig. (1)

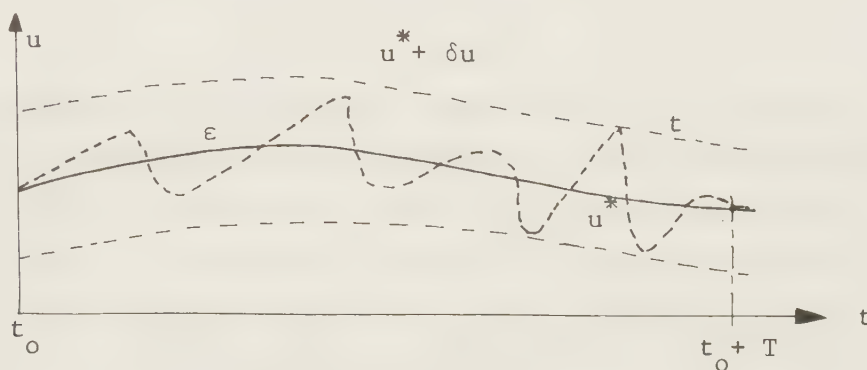
Mathématiquement, ceci implique que la norme utilisée pour la fonction $u(t)$ continue et continûment dérivable soit $\|u\| = \max_{t_0 \leq t \leq t_0+T} |u(t)| + \max_{t_0 \leq t \leq t_0+T} |\dot{u}(t)|$

Bien plus tard, Weierstrass apporta deux contributions aujourd'hui fondamentales pour les problèmes de commande optimale.

- en premier lieu la possibilité d'envisager une commande discontinue (conditions d'Erdmann - Weierstrass), ce qui est essentiel pour la synthèse des systèmes à relais.

- Weierstrass constata que, dans certains cas, un nouveau type de trajectoire variée menait à des valeurs du critère de performance plus faibles que pour la courbe "optimale" fournie par les équations d'Euler ou d'Hamilton.

Les variations sont telles qu'aucune contrainte n'existe sur δu , mais seulement sur δu ($|\delta u| \leq \epsilon$) (cf. fig. 2).



"Voisinage fort"

Fig. (2)

La condition nécessaire d'extremum fort de Weierstrass correspond, en langage de commande optimale à $\delta H \geq 0 \forall \delta u$ (dans la littérature δH est généralement noté E).

D'après (17) ceci signifie que H est minimum par rapport à u. Voilà en quoi on peut dire que les travaux de Weierstrass recelaient l'essence du principe du Minimum, qui fut développé depuis une trentaine d'années sous nouvel angle successivement par Mac Shane, Hestenes et surtout Pontryagin.

La motivation est la suivante : revenant à la conclusion (18) et au raisonnement qui précède, on remarque que, si $u(t)$ appartient à un domaine fermé Ω (ce qui est souvent le cas dans les problèmes de commande), les variations δu ne sont plus libres et il ne sera pas possible, dans le cas général de conclure à partir de (15).

Au lieu donc d'admettre des variations d'amplitude infiniment petites pendant tout l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$, Pontryagin considère des variations de type impulsionnel, c'est à dire de durée infiniment courte, mais telles que $u + \delta u$ reste dans Ω (cf. fig. 3).

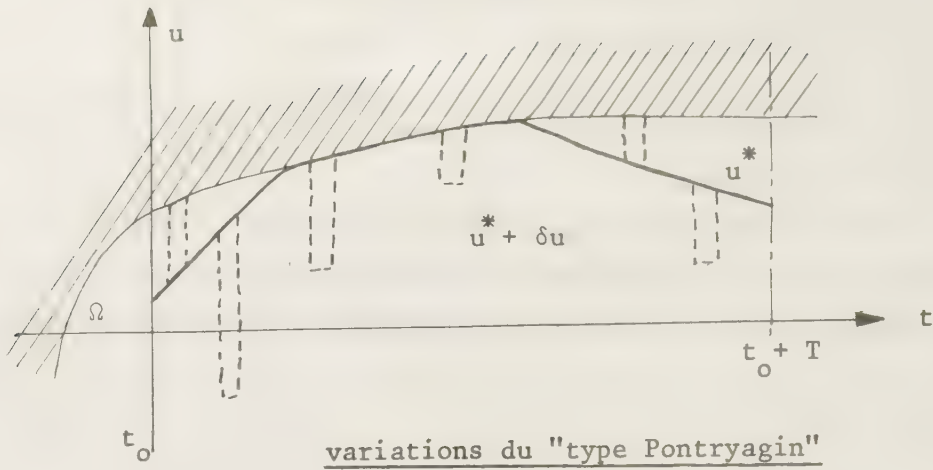


Fig. (3)

Plutôt que de se lancer dans une démonstration longue et fastidieuse dont on trouvera différentes formes plus ou moins édulcorées dans -1- 2- 3- 4-, voici une considération intuitive menant à la conclusion de Pontryagin.

Une fois λ fixé par (13) et (14), on a (16) :

$$\delta J(\underline{u}^*) = \int_{t_0}^{t_0 + T} [H(\underline{x}, \lambda, \underline{u}^* + \delta \underline{u}) - H(\underline{x}, \lambda, \underline{u}^*)] dt$$

pour un $\delta \underline{u}$ impulsionnel en t , il vient donc :

$$\delta J \approx \delta H(t_1) \Delta \quad (19)$$

Δ représentant la largeur de l'impulsion et ayant le signe positif.

Si l'on désire $\delta J \geq 0$ (pour avoir un minimum), $\delta H(t_1)$ doit être ≥ 0 . Ceci est bien entendu vrai pour tout $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$.

Ainsi H doit être à tout instant minimum par rapport à u ($u \in \Omega$)

1-3 Conclusion :

De cet exposé succinct sur les méthodes variationnelles, il faut retenir qu'en l'absence de contraintes sur la commande, les conditions d'optimalité (13) (14) et (18) sont rapidement obtenues à la suite d'un calcul mené par analogie avec le formalisme du calcul différentiel. Si, par hypothèse, les conditions aux limites ne sont pas données par des équations telles que (2), le calcul de la première variation de J n'en est pas pour autant compliqué (cf. § 2).

Si, de plus, le domaine de $\underline{u}$ est borné, l'équation (18) fournissant $\underline{u}^*$ doit être remplacée par $H_{\min/\underline{u}}$.

Dans tous les cas, la solution du problème d'optimisation est celle d'un système différentiel dont les conditions aux limites sont connues en t_0 et $t_0 + T$.

$$\begin{aligned} \text{En l'occurrence : } \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) & \dot{\underline{\lambda}} &= - \underline{H}_{\underline{x}} \\ \underline{x}(t_0) &= \underline{x}_0 & \underline{\lambda}(t_0 + T) &= 0 \\ \text{et } \underline{H}_{\underline{u}} &= 0 \quad \text{ou } \underline{H}_{\min/\underline{u}} \quad \text{si } \underline{u} \in \Omega \text{ fermé} \end{aligned}$$

Ces principes et résultats servent maintenant de base pour établir les conditions d'optimalité relatives au cas où l'état est contraint.

2 - APPLICATION DES METHODES VARIATIONNELLES AUX PROBLEMES A ETAT CONTRAINT -

Nous abordons maintenant le cas où le vecteur d'état appartient à un domaine fermé. Ce problème se présente différemment de celui du vecteur de commande contraint, qui est une "grandeur sans inertie" contrairement à l'état.

De fait, on peut distinguer trois types de contraintes sur l'état :

- En premier lieu, il arrive fréquemment que l'on souhaite que certains états n'atteignent pas des valeurs trop importantes, sans qu'il soit possible de se fixer avec précision les bornes à ne pas dépasser. Ceci n'est pas à proprement parler un problème de contraintes et peut être résolu en plaçant dans le critère les termes quadratiques (ou de puissance paire) qui seront d'autant plus influents que les états considérés s'éloigneront de la zone permise. C'est là d'ailleurs que réside la motivation des critères quadratiques employés en régulation. Du point de vue mathématique, la solution de ce type de problème est conforme à celle du paragraphe précédent.

- La grandeur d'état ne peut pas, physiquement, dépasser certaines bornes parfaitement fixées.

Considérons, par exemple, une vanne mue par un moteur. Ici le débit de la vanne constitue l'état x et le signal d'excitation du moteur, la commande u . Lorsque ce débit a atteint sa valeur maximale (ou minimale), il n'existe plus de relation intégrale entre x et u . Ce problème de contraintes, que nous appellerons plus correctement "problème de butées" est du point de vue théorique un problème de discontinuités sur les équations d'état.

- La grandeur d'état pourrait, physiquement, dépasser certaines bornes, mais n'en a pas le droit, car, par exemple, il pourrait y avoir détérioration du processus au delà de ces bornes connues avec précision.

Ceci peut notamment se produire dans un système chimique où le dépassement d'une température engendre une nouvelle réaction alors que le "voisinage" avec cette température critique ne doit pas être pénalisé.

On a ici affaire au véritable problème de contrainte dans lequel les équations d'état ont une définition unique sur $[t_0, t_0 + T]$ et où certaines inégalités doivent être vérifiées.

Ce paragraphe concerne l'établissement des conditions d'optimalité propres à ces deux derniers cas : problèmes de butées et problèmes de contraintes.

Afin de donner aux résultats exposés un caractère général, on considère un processus non stationnaire et un critère de performance avec coût final (Problème de Bolza).

2-1 Conditions d'optimalité pour les "problèmes de butées" :

Considérons l'exemple simple d'un double intégrateur $\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = u$ x_2 étant borné par + et - 1. Quand $|x_2| = 1$ ($t = t_1$), l'équation $\dot{x}_2 = u$ devient $\dot{x}_2 = 0$, et, par conséquent, le modèle se réduit à $\dot{x}_1 = \pm 1$. A l'instant de sortie de butée ($t = t_2$), on a à nouveau deux équations d'état.

Plus généralement, supposons qu'un processus soit défini par :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}_1(\underline{x}, \underline{u}, t) \text{ sur } [t_0, t_1] \text{ et } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (20)$$

$$\dim \underline{x} = n \quad \dim \underline{u} = m$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}_2(\underline{x}, \underline{u}, t) \text{ sur } [t_1, t_0 + T] \quad (21)$$

$$\text{où } t_1 \text{ est tel que } \underline{N}(\underline{x}(t_1), t_1) = 0 \quad (22)$$

$$\dim \underline{N} = q$$

Nous devons déterminer :

$$\underline{u}(t) \text{ (} t \in [t_0, t_0 + T] \text{)} \text{ tel que } J(\underline{u}(t)) = K(\underline{x}(t), t) \Big|_{t_0+T}^{t_0} + \int_{t_0}^{t_0+T} f_0(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) dt \text{ soit minimum} \quad (23)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont obtenues simplement par le calcul des variations (cf. notamment [11]). Pour cela, on adjoint au critère, à l'aide de multiplicateurs de LAGRANGE $\underline{v}$ et $\underline{\lambda}(t)$, les q relations $\underline{N}$ et les équations d'état :

$$J = K(\underline{x}(t), t) \Big|_{t_0+T}^{t_0} + \underline{v}^T \underline{N}(\underline{x}(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (H_1 - \underline{\lambda}^T \dot{\underline{x}}) dt + \int_{t_1}^{t_0+T} (H_2 - \underline{\lambda}^T \dot{\underline{x}}) dt \quad (24)$$

$$\text{où } H_i = f_0 + \underline{\lambda}^T \underline{f}_i \quad (25)$$

soit $d\underline{x}(t_i)$ la variation totale de $\underline{x}(t)$ à l'instant t_i

$$\text{On a } d\underline{x}(t_i) = \delta \underline{x}(t_i) + \dot{\underline{x}}(t_i) dt_i \quad (26)$$

$$\text{notons que } d\underline{x}(t_0) = 0 \text{ car } \underline{x}(t_0) \text{ imposé et } d\underline{x}(t_0 + T) = \delta \underline{x}(t_0 + T) \quad (27)$$

car $t_0 + T$ imposé.

La première variation du critère s'écrit donc, compte tenu que :

$$- \int_{t_i}^{t_j} \dot{\lambda}^T \delta \underline{x} dt = \lambda^T(t_i) \delta \underline{x}(t_i) - \lambda^T(t_j) \delta \underline{x}(t_j) + \int_{t_i}^{t_j} \dot{\lambda}^T \delta \underline{x} dt$$

$$\delta J = \left. \underline{K}_x^T \delta \underline{x} \right|_{t_0+T} + \left. \underline{v}^T \underline{N}_x \delta \underline{x} \right|_{t=t_1} + \underline{v}^T \underline{N}_t dt_1 + \left. (H_1 - \lambda^T \dot{\underline{x}}) \right|_{t_1^-} dt_1 - \left. (H_2 - \lambda^T \dot{\underline{x}}) \right|_{t_1^+} dt_1 - \left. \lambda^T \delta \underline{x} \right|_{t_0} /$$

$$- \left. \lambda^T \delta \underline{x} \right|_{t_1^+}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_1^-} [(\underline{H}_1^T + \dot{\lambda}^T) \delta \underline{x} + \underline{H}_1^T \delta \underline{u}] dt + \int_{t_1^+}^{t_0+T} [(\underline{H}_2^T + \dot{\lambda}^T) \delta \underline{x} + \underline{H}_2^T \delta \underline{u}] dt$$

soit :

$$\delta J = \left. (\underline{K}_x^T - \lambda^T) \delta \underline{x} \right|_{t_0+T} + [\underline{v}^T \underline{N}_x + \lambda^T(t_1^+) - \lambda^T(t_1^-)] \delta \underline{x}(t_1) + [\underline{v}^T \underline{N}_t + H_1(t_1^-) - H_2(t_1^+)] dt_1$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1^-} [(\underline{H}_1^T + \dot{\lambda}^T) \delta \underline{x} + \underline{H}_1^T \delta \underline{u}] dt + \int_{t_1^+}^{t_0+T} [(\underline{H}_2^T + \dot{\lambda}^T) \delta \underline{x} + \underline{H}_2^T \delta \underline{u}] dt \quad (28)$$

Si les variations ont été effectuées "autour" de la trajectoire optimale, $dJ = 0$ pour tout $\delta \underline{x}(t_0+T), \delta \underline{x}(t_1), dt_1, \delta \underline{x}(t)$ et $\delta \underline{u}$ tel que $d\underline{N}(\underline{x}(t_1), t_1) = 0$ ce qui entraîne :

$\left. \begin{aligned} \underline{x}(t_0) &= \underline{x}_0 \\ \dot{\underline{x}} &= \underline{f}_1(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \dot{\lambda} &= - \underline{H}_1^T \\ \underline{H}_1 &= 0 \\ \underline{H}_1 &= 0 \end{aligned} \right t \in [t_0, t_1^-]$	$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{f}_2(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \dot{\lambda} &= - \underline{H}_2^T \\ \underline{H}_2 &= 0 \end{aligned} \right t \in [t_1^+, t_0+T]$
$\lambda(t_1^+) = \lambda(t_1^-) - \underline{N}_x \underline{v}$ $H_2(t_1^+) = H_1(t_1^-) + \underline{N}_t^T \underline{v}$	$\lambda(t_0+T) = \underline{K}_x(\underline{x}(t_0+T), t_0+T)$

(29)

Si u appartient aussi à un domaine fermé $\bar{U}$, les relations $\underline{H}_1 = 0$ et $\underline{H}_2 = 0$ deviennent $\underline{H}_1 \min$ et $\underline{H}_2 \min$ (cf. théorème de Pontryagin du paragraphe précédent).

2-2 Conditions d'optimalité pour les "problèmes de contraintes" :

Comme précédemment, considérons d'abord un exemple simple où le processus est décrit par $\dot{x}_1 = x_2 - x_1$, $\dot{x}_2 = -x_2 + u$ et avec x_1 qui ne doit pas sortir de l'intervalle $[-1, +1]$

Pour que, $x_1(t_1)$ valant par exemple $+1$, x_1 reste en contrainte sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, il faut et il suffit que :

- d'une part $\dot{x}_1(t_1) = 0 \implies x_2(t_1) = +1$

- et que d'autre part u soit tel que $\dot{x}_2(\sigma) = 0$ ($\sigma \in [t_1, t_2]$) cad. $u = +1$

Plus généralement, considérons un système décrit par $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u, t)$ (30)
muni de la contrainte $S(\underline{x}, t) \leq 0$ (31)
et le critère de performance (23).

Si à l'instant t_1 , $S(\underline{x}(t_1), t_1) = 0$: pour que $S(\underline{x}(\sigma), \sigma) = 0$, pour $\sigma \in [t_1, t_2]$, il faut et il suffit que :

- d'une part $S^{(q)}(\underline{x}(\sigma), \sigma) = 0$ (en supposant que la q ème dérivée par rapport au temps de S soit la première dérivée faisant apparaître la commande u :
 $S^{(q)}(\underline{x}(\sigma), \sigma) = 0 \implies u(\sigma)$) (32)

- et que d'autre part le vecteur $\underline{N}^T(\underline{x}(t_1), t_1) \triangleq (S \ S' \dots S^{(q-1)}) = 0$ (33)

("conditions de tangence")

Remarquons que si l'algorithme de résolution du problème à valeurs limites en plusieurs points, que nous allons obtenir, requiert un calcul à rebours, c'est en t_2 que nous devons utiliser la condition $\underline{N} = \underline{0}$.

Notons encore que ce problème où q dérivées sont nécessaires pour faire apparaître la commande est appelé dans la littérature S V I C (State Variable Inequality Constraint) du q ème ordre.

Plusieurs contributions ont été apportées à la solution de ce type de problème, autour de 1962. Tout d'abord Gamkrelidze, Pontryagin -1- considérèrent le S V I C du premier ordre et furent les premiers à constater des discontinuités sur les variables adjointes aux instants d'entrée et de sortie de contraintes. Des résultats équivalents furent obtenus par Berkovitz -5-. Dreyfus -7- aborda le problème sous l'optique de la programmation dynamique et obtint pour le même problème des variables adjointes continues. Dans d'autres travaux, Dreyfus -6- utilisa le fait que lors du passage en contraintes la relation $S(\underline{x}, t)$ permet de réduire d'une dimension l'état du processus. Dans -9- on démontre l'équivalence entre les résultats de Dreyfus -6- et ceux de Gamkrelidze et Berkovitz.

A l'aide du calcul des variations et en adjoignant les conditions de tangence au critère au moyen de multiplicateurs, Bryson, Denham et Dreyfus -8- ont généralisé les résultats de Gamkrelidze -1- à un S V I C du q ème ordre :

Pour le problème posé ci-dessus, on trouve dans l'hypothèse où la contrainte est atteinte sur $[t_1, t_2]$:

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}(t_0) &= \underline{x}_0 \\ \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \dot{\underline{\lambda}} &= - \underline{H}_{\underline{x}} \\ \underline{H}_{\underline{u}} &= 0 \text{ (ou } \underline{H}_{\min} \text{ si } \underline{u} \in \bar{U}) \end{aligned} \right| \begin{aligned} H &= f_0 + \underline{\lambda}^T \underline{f} \\ t &\in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}(t_1^+) &= \underline{\lambda}(t_1^-) - N_{\underline{x}}^T \underline{v}|_{t_1} - b \underline{s}_{\underline{x}}^{(q-1)}|_{t_1} \\ H(t_1^+) &= H(t_1^-) + N_{\underline{t}}^T \underline{v}|_{t_1} - b \underline{s}_{\underline{x}}^{(q-1)T} \dot{\underline{x}} \\ N(\underline{x}(t_1), t_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \dot{\underline{\lambda}} &= - \underline{H}_{\underline{x}} + \underline{s}_{\underline{x}}^{(q)} [\underline{s}_{\underline{u}}^{(q)}]^{-1} \underline{f}_{\underline{u}}^T \underline{\lambda} \\ \underline{s}^{(q)}(\underline{x}, \underline{u}) &= 0 \quad \underline{s}(\underline{x}, t) = 0 \end{aligned} \right| t \in [t_1^+, t_2^-]$$

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}(t_2^+) &= \underline{\lambda}(t_2^-) + b \underline{s}_{\underline{x}}^{(q-1)}|_{t_2^-} \\ H(t_2^+) &= H(t_2^-) + b \underline{s}_{\underline{x}}^{T(q-1)} \dot{\underline{x}}|_{t_2^-} \\ + \text{éventuellement } N(\underline{x}(t_2), t_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \dot{\underline{\lambda}} &= - \underline{H}_{\underline{x}} \\ \underline{H}_{\underline{u}} &= 0 \text{ (ou } H_{\min}) \end{aligned} \right| t \in [t_2^+, t_0 + T]$$

$$\underline{\lambda}(t_0 + T) = K_{\underline{x}}(\underline{x}(t_0 + T), t_0 + T) \quad (34)$$

On doit noter que le scalaire b reste au choix du programmeur. Ceci signifie que le vecteur adjoint n'est pas unique lorsque $S(\underline{x}, t) = 0$. Pour un S.V.I.C du premier ordre il est notamment possible de rendre le vecteur adjoint continu soit en t_1 , soit en t_2 .

La présence de tels sauts ne simplifie évidemment pas les algorithmes de résolution. C'est pourquoi, Speyer et Bryson en 1968 -10- faisant après Dreyfus l'observation que la dimension du vecteur d'état est réduite en contraintes, démontrèrent l'existence de nouvelles conditions d'optimalité.

Sans s'appesantir sur la démonstration qui utilise comme au paragraphe 2-1 le formalisme du calcul des variations et l'adjonction des contraintes au critère au moyen de multiplicateurs, nous donnons ici le principe et les résultats.

L'idée est donc que lorsque $S(\underline{x}, t) = 0$, $N(\underline{x}(t), t)$ donne q relations en $\underline{x}$ et t , ce qui réduit la dimension du vecteur d'état à $n - q$. On définit un vecteur $\underline{z}(\underline{x}, t)$ de dimensions $n - q$ tel que le vecteur $\begin{pmatrix} N \\ \underline{z} \end{pmatrix}$ engendre un espace de dimension n (ceci équivaut à l'hypothèse que $\begin{bmatrix} N \\ \underline{z} \end{bmatrix}^{-1}$).

$$\text{Posons : } \begin{bmatrix} M \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ \underline{z} \end{bmatrix}^{-1} \quad (35)$$

$\underline{u}$ est fourni par la relation $S^{(q)}(\underline{x}, \underline{u}, t) = 0$, donc $\underline{u}$ est fonction de $\underline{z}$ et de t .

En contrainte, on a donc $\dot{\underline{z}} = \underline{g}(\underline{z}, t)$ $\dim \underline{z} = n - q$

$$\text{Soit l'Hamiltonien correspondant : } G = \underline{\mu}^T \underline{g}(\underline{z}, t) + f_0(\underline{z}, t) \quad (36)$$

Supposons comme précédemment que le système reste en contrainte sur $[t_1, t_2]$; J s'écrit :

$$J = K(\underline{x}(t_0 + T), t_0 + T) + \int_{t_0}^{t_1^-} (H - \lambda^T \dot{\underline{x}}) dt + \int_{t_1^+}^{t_2^-} (G - \underline{\mu}^T \dot{\underline{z}}) dt + \int_{t_2^+}^{t_0 + T} (H - \lambda^T \dot{\underline{x}}) dt$$

La première variation est calculée de manière classique, en exprimant cependant $d\underline{x}(t_1)$ (et $d\underline{x}(t_2)$), à l'aide de $d\underline{z}(t_1)$ (et $d\underline{z}(t_2)$) et $d\underline{N}$ ($= 0$ en t_1 et t_2)

On obtient ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \\ \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \dot{\underline{\lambda}} = - \underline{H}_{\underline{x}} \end{array} \right| t \in [t_0, t_1^-]$$

$$\left. \begin{array}{l} N(\underline{x}(t_1), t_1) = 0 \\ \underline{\mu}^T = \underline{\lambda}^T A \\ G = H + \underline{\lambda}^T (M \underline{N}_t + A \underline{Z}_t) \end{array} \right|_{t_1} \quad \begin{array}{l} \text{rappelons que } [M : A] = \begin{bmatrix} N \\ \underline{z} \end{bmatrix}^{-1} \\ \text{et notons que les indices } t \text{ signifient} \\ \text{dérivée partielle par rapport au temps} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\underline{z}} = \underline{g}(\underline{z}, t) \\ \dot{\underline{\mu}} = - \underline{G}_{\underline{z}} \\ S^{(q)} = 0 \end{array} \right| t \in [t_1^+, t_2^-]$$

$$\underline{N}(\underline{x}(t_2), t_2) = 0 \quad (\text{éventuellement})$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{\mu}^T &= \underline{\lambda}^T A \\ G &= H + \underline{\lambda}^T (M \underline{N}_{\underline{t}} + A \underline{Z}_{\underline{t}}) \end{aligned} \right|_{t_2}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= f(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \dot{\underline{\lambda}} &= - \underline{H}_{\underline{x}} \\ \underline{\lambda}(t_0 + T) &= \underline{K}_{\underline{x}}(\underline{x}(t_0 + T), t_0 + T) \end{aligned} \right|_{t \in [t_2^+, t_0 + T]} \quad (37)$$

2-3 Conclusion :

Les conditions d'optimalité des problèmes de butées et des problèmes de contraintes se présentent donc sous forme de systèmes différentiels dont les conditions aux limites sont données en plusieurs points. De plus, les variables adjointes peuvent éventuellement présenter des discontinuités aux instants d'entrée et de sortie de butée ou de contrainte.

Une autre possibilité de traitement de ce type de problème d'optimisation consiste à introduire dans le critère de performance un terme de pénalisation apparaissant en cas de violation des contraintes inégalité.

Cette solution n'est pas envisagée ici : l'esprit de ce chapitre et du suivant est, en effet, plutôt orienté vers la recherche d'algorithmes de résolution des problèmes à valeurs limites en plusieurs points.

3 - APPLICATION A LA REGULATION PAR CRITERE QUADRATIQUE -

Après avoir consacré la première partie de ce mémoire à montrer l'intérêt des critères quadratiques pour la régulation des systèmes dynamiques multivariés, et en avoir décrit l'application à la commande d'un générateur de vapeur fonctionnant en télé-régulation, il reste à étudier ce que devient cette application pour un programme de charge de grande amplitude susceptible d'amener les organes réglants en saturation.

La première étape consiste à écrire les conditions d'optimalité pour le problème considéré, puis à résoudre sur ordinateur le système différentiel à valeurs limites en plusieurs points obtenu.

Si l'on se reporte au chapitre III de la 1ère partie et à l'exemple du générateur de vapeur, on constate que le critère contient, dans son terme $\underline{u}^T \underline{R} \underline{u}$, non pas la commande elle-même (des débits) mais la dérivée de cette com-

ande. Par conséquent, les débits, qui sont les grandeurs susceptibles d'atteindre leurs butées, sont, sur le plan théorique, des états. On a donc affaire à un problème de butées sur l'état.

Plus précisément, on sait (cf 1ère partie) qu'un processus d'équations

$$\begin{aligned}\dot{\underline{z}} &= \underline{A}\underline{z} + \underline{B}\underline{w} + \underline{d}(t) & \underline{w} &= \text{la commande physique} \\ \underline{y} &= \underline{C}\underline{z}\end{aligned}\quad (38)$$

et dont les commandes $\underline{w}$ sont soumises à $\underline{w}_m \leq \underline{w} \leq \underline{w}_M$ (39)
est "correctement" régulé par optimisation si le critère est de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + T} (\underline{y}^T \underline{L} \underline{y} + \dot{\underline{w}}^T \underline{R} \dot{\underline{w}}) dt \quad (40)$$

Le problème est alors réécrit pour faire apparaître la forme habituelle du critère.

$$\text{Posant en effet } \underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{z} \\ \underline{w} \end{pmatrix} \text{ et } \underline{u} = \dot{\underline{w}} \quad (41)$$

$$\text{et } \underline{C}^T \underline{L} \underline{C} = \underline{Q} \quad (42)$$

(38) et (40) deviennent :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{I}_m \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} \underline{I}_n \\ 0 \end{bmatrix} \underline{d}(t) \quad (43)$$

$\underline{I}_k$ = matrice unité
k × k

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0 + T} \left[\underline{x}^T \begin{bmatrix} \underline{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} \right] dt \quad (44)$$

les m dernières composantes de $\underline{x}$ étant restreintes par (39).

Avant d'écrire les conditions d'optimalité, il est important de constater que ce "problème de butées" peut être également traité comme un "problème de contraintes".

Pour s'en convaincre, raisonnons sur un exemple simple :

$$\begin{aligned}\text{soit } \dot{x}_1 &= x_2 & \dot{x}_2 &= u & x_2 &\text{ joue le rôle de } w \text{ et est borné} \\ \text{avec } J &= \int (x_1^2 + u^2) dt & & & \text{par } \pm 1 = \bar{w}\end{aligned}$$

Physiquement, il s'agit d'un problème de butées, c'est-à-dire avec discontinuité dans les équations d'état. Ainsi lorsque x_2 est en butée $\dot{x}_2 = u$ devient $\dot{x}_2 = 0$ et u pourrait être quelconque, s'il n'apparaissait pas en u^2 dans le critère ; en conséquence de quoi il faut annuler u . Pour la même raison

d'ailleurs, u vaut 0 à l'entrée et à la sortie de butée et est donc continu (conditions qu'on retrouve évidemment en appliquant les conditions d'optimalité).

Or, si nous considérons ce problème comme un "problème de contraintes", (cf. paragraphe 2) les "conditions de tangence" (33) donnent $u = 0$ (en t_1 et t_2) et la condition de maintien en contrainte (32) donne $\dot{x}_2 = 0$ soit $u = 0$ sur $[t_1, t_2]$.

Cette équivalence due à la fois à l'intégrateur de commande et au terme quadratique en u dans le critère, se généralise immédiatement au cas considéré ci-dessus. On pourra donc utiliser n'importe laquelle des formules d'optimalité des paragraphes 2-1 ou 2-2.

Dans tous les cas, l'Hamiltonien, hors butée, s'écrit :

$$H = \frac{1}{2} (\underline{z}^T Q \underline{z} + \underline{u}^T R \underline{u}) + \underline{\lambda}^T \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \underline{u} + \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \underline{d}(t)$$

$$H_u = 0 \Rightarrow R \underline{u} + \begin{bmatrix} 0 & : & I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{\lambda}_w \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{u} = -R^{-1} \underline{\lambda}_w$$

$\underline{\lambda}_w$ = le vecteur adjoint des états $\underline{w}$

$$\dot{\underline{\lambda}} = -H_{\underline{x}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\underline{\lambda}} \\ \underline{\lambda}_w \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} Q \underline{z} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T \underline{\lambda}_z \\ B^T \underline{\lambda}_z \end{bmatrix}$$

Notons que $\underline{\lambda}_w$ n'entre nullement dans le calcul de $\underline{\lambda}_z$

- Supposons d'abord que sur $[t_1, t_2]$, $\underline{w} = \underline{w}_m$ (c'est-à-dire toutes les composantes de $\underline{w}$ sont en butée). Alors $u = 0$ sur $[t_1, t_2]$.

D'autre part en t_1 , par exemple, on a $H^- = H^+$ cf. (29) (34) ou (37)

$$H^- = \frac{1}{2} (\underline{z}^T Q \underline{z} - \underline{u}^T R \underline{u}) + \underline{\lambda}_z^{-T} (A \underline{z} + B \underline{w} + \underline{d})$$

$$H^+ = \frac{1}{2} (\underline{z}^T Q \underline{z}) + \underline{\lambda}_z^{-T} (A \underline{z} + B \underline{w} + \underline{d})$$

On peut vérifier également à l'aide des conditions d'optimalité que $\underline{\lambda}_z$ est continu. Il en est de même, bien entendu, de l'état $\underline{z}$; d'autre part, $\underline{w}$ par référence à la pratique peut être supposé continu (cf. plus loin exemple du générateur de vapeur).

$$\text{donc } H^- = H^+ \Rightarrow \underline{u}^- = 0 \Rightarrow \underline{\lambda}_w(t_1^-) = 0$$

De même on trouvera que $\underline{\lambda}_w(t_2^+) = 0$ ce qui veut dire que, pendant la

période de butée, du point de vue algorithmique, (λ_w n'entrant pas dans le calcul de λ_z), λ_w peut être considéré comme continu et maintenant nul (cf. conditions de contraintes de Dreyfus -7-), ou bien peut être supprimé (conditions de Speyer - Bryson) -10-.

- Le même résultat est obtenu si on suppose qu'en t_1^- , w_1 , seulement, est en butée (w_1 = les premières composantes de w) et qu'en t_1^+ , w_2 y entre ($w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$).

Posons, en effet :

$$\underline{u}^T R \underline{u} = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_i = \dot{w}_i \quad R_i \text{ diagonale}$$

On a dans ce cas :

$$\underline{u}_1(t_1^-) = 0 = \underline{u}_1(t_1^+) \quad \underline{u}_2(t_1^-) = -R_2^{-1} \lambda_{w_2} \quad \underline{u}_2(t_1^+) = 0$$

$$\text{et } H^- = \frac{1}{2} (\underline{z}^T Q \underline{z} - \underline{u}_2^{-T} R_2 \underline{u}_2^-) + \lambda_z^T (A \underline{z} + B \underline{w} + \underline{d})$$

$$H^+ = \frac{1}{2} (\underline{z}^T Q \underline{z}) + \lambda_z^T (A \underline{z} + B \underline{w} + \underline{d})$$

$$\text{donc } H^- = H^+ \Rightarrow \underline{u}_2(t_1^-) = 0 \Rightarrow \lambda_{w_2} = 0$$

En résumé, étant donné

$$\dot{\underline{z}} = A \underline{z} + B \underline{w} + \underline{d}$$

$$\underline{z}(t_0) = \underline{z}_0$$

$$\underline{w}_m \leq \underline{w} \leq \underline{w}_M$$

$$\text{et le critère } J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0^+} (\underline{z}^T Q \underline{z} + \dot{\underline{w}}^T R \dot{\underline{w}}) dt$$

les conditions d'optimalité sont :

$$\dot{\underline{w}} = -R^{-1} \lambda_w$$

$$\dot{\lambda}_z = -Q \underline{z} - A^T \lambda_z \quad \lambda(t_0 + T) = 0$$

$$\dot{\lambda}_w = -B^T \lambda_z$$

Toutes les variables adjointes λ sont continues : la variable λ_{w_i} s'annule lorsque l'état correspondant w_i est en butée.

En définitive, pour le critère quadratique développé dans la 1ère partie et des perturbations d'amplitude telles que les "commandes réelles" soient portées à saturation, il est nécessaire de "forcer à zéro" les variables adjointes correspondant aux commandes en saturation. Même dans ce cas particulier, le problème reste donc du type à valeurs limites en plusieurs points.

4 - CONCLUSION -

Ce chapitre constitue l'essentiel de la théorie variationnelle nécessaire à la préparation de la seconde étape vers une régulation optimale industrielle, celle où il est explicitement tenu compte des diverses contraintes (inégalités) de fonctionnement;

L'exposé a été volontairement dépouillé de tout ce qui est, à notre avis, superflu quant aux applications, et il montre qu'un problème de commande optimale n'ayant pas fait l'objet de l'étude présente pourra cependant être traité sans difficulté par le calcul des variations, quitte ensuite à introduire la condition $H_{\min}$ si des contraintes inégalités régissent la commande.

Dans le cas le plus complexe (contraintes sur l'état) les conditions d'optimalité se présentent sous la forme d'un système différentiel à valeurs limites en plusieurs points, qu'il est nécessaire de résoudre, pour établir une commande "en ligne", en un temps faible devant le temps de réponse du processus. L'étude des algorithmes de résolution fait l'objet du chapitre suivant, dont l'exemple d'application concerne la régulation par critère quadratique, dont on vient de préciser les conditions d'optimalité.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- PONTRYAGIN L.S. et al - "The Mathematical Theory of Optimal Processes"
Interscience 62
- 2- ATHANS M. FALB P.L. - "Optimal Control"
Mc Graw Hill 1966
- 3- LEONDES C.T. (ed.) - Modern control systems theory
chap. 7 : "An Introduction to the Pontryagin
Maximum Principle" par J.S. MEDITCH
pp 285-318 - Mc Graw Hill 1965
- 4- LAMEAU J. MEZENEC R. - AEA d'Automatique (Pontryagin)
Edition E.N.S.M. 1968
- 5- BERKOVITZ L.D. - "On Control Problems with bounded State
Variables"
Journal of Mathematics and Analytical Applica-
tions
Vol. 5 - pp. 488-501 - 1962
- 6- DREYFUS S.E. - "Variational Problems with Inequality Constraints"
Journal of Mathematics and Analytical Applications
Vol. 4 - pp. 297-308 - 1962
- 7- DREYFUS S.E. - "Dynamic Programming and the Calculus of Varia-
tions"
Academic Press 1965 - pp. 181-186
- 8- BRYSON A.E. DENHAM W.F. - "Optimal Programming Problems with Inequality
and DREYFUS S.E. Constraints"
I - Necessary conditions for extremal solutions
AIAA Journal Vol. 1 - n°11 - Nov. 1963 -
pp 2544-2551
- 9- BERKOVITZ L.D. - "The Equivalence of some Necessary Conditions for
and DREYFUS S.E. Optimal Control in Problems with bounded State
Variables"
Journal of Mathematics and Analytical Applications
Vol. 10 - pp 275-283 - 1965
- 10- SPEYER J.L. - "Optimal Programming Problems with a bounded State
and BRYSON A.E. Space"
AIAA Journal - Vol. 6 - n°8 - 1968 - pp 1488-1491
- 11- BRYSON A.E. and HO Y.C. - "Applied Optimal Control"
Blaisdell 1969
- 12- de LARMINAT Ph. - "Etude d'une régulation optimale"
THOMAS Y. Rapport final contrat D.G.R.S.T. 68-01-409
Annexe IV (Y. Thomas).

Chapitre IV

RESOLUTION DES CONDITIONS D'OPTIMALITE ISSUES DES METHODES VARIATIONNELLES

Nous avons vu que les problèmes de régulation s'adaptent assez bien à la formulation de l'optimisation fonctionnelle dynamique avec notamment la prise en compte des butées et contraintes inhérentes à tout processus. De plus, les conditions nécessaires d'optimalité issues des méthodes variationnelles sont aisément écrites dès lors qu'a été assimilé le formalisme du calcul des variations.

Dans ces conditions, la question fondamentale de notre introduction revient à l'esprit : "Pourquoi les théories d'optimisation, tant développées pour les besoins aérospatiaux, ont-elles eu jusqu'à maintenant si peu d'impact sur les applications industrielles ? "

En ce qui concerne les systèmes contraints, la réponse à cette question peut se déduire facilement des constatations suivantes.

La résolution des problèmes à valeurs limites en plusieurs points qu'impliquent les systèmes contraints, non seulement nécessite des algorithmes complexes de spécialistes mais fournit la commande optimale sous la forme "boucle ouverte" (soit $u^*(t)$). Pour pallier l'influence des perturbations et les erreurs de modèle impossibles à prédire, on devra donc, lors d'une commande en ligne procéder périodiquement au calcul de $u^*(t)$.

Ceci suppose le développement d'algorithmes dont d'une part l'ampleur soit compatible avec les impératifs techniques et économiques du processus à réguler et dont d'autre part le temps de calcul soit faible, au moins devant le temps de réponse du système régulé. Comme dans l'état actuel l'importance des moyens à mettre en oeuvre (temps d'études, temps de calcul, mémoires) est généralement prohibitive devant l'urgence des besoins de l'industrie, il n'est pas étonnant que le cheminement vers l'ère de l'optimisation industrielle ait, jusqu'à présent, été fort lent.

Or, il semble bien - et ce chapitre s'efforcera de le montrer - que les obstacles générateurs de cette lenteur puissent être très sensiblement atténués par le recours au calcul hybride qui allie la vitesse d'intégration de l'analogique à la puissance organisatrice et synthétique du numérique. C'est donc aux deux aspects théorique et pratique du calcul des systèmes dif-

férentiels à valeurs limites en plusieurs points qu'est consacré ce chapitre IV. L'accent est mis sur la résolution des problèmes à état contraint : différentes méthodes existantes sont testées en hybride et leur critique permet de développer une méthode dite "des dérivées partielles" assurant la convergence dans tous les cas pratiques considérés.†

Différentes possibilités de classement des 'méthodes d'intégration des systèmes différentiels à valeurs limites en plusieurs points s'offrent à l'utilisateur selon que ce dernier est "mathématicien" ou "ingénieur". En effet, le mathématicien dégagera des principes applicables aussi bien dans un espace de variables que dans un espace fonctionnel et effectuera un classement selon ces principes. L'ingénieur, en revanche, sera plutôt tenté de distinguer entre les méthodes d'itération sur des variables et les méthodes d'itération sur des fonctions.

Nous avons choisi un compromis permettant à la fois de mettre en relief le rôle joué par deux méthodes fondamentales de l'analyse numérique : la méthode de NEWTON et celle du GRADIENT, et de montrer, pour le problème concerné, la supériorité des itérations sur les trajectoires.

Outre le développement des méthodes itératives, il est bon d'indiquer que notre équipe a mis au point, sur des exemples élémentaires, des algorithmes utilisant partiellement la solution analytique du système différentiel, tant en analogique -1- qu'en numérique -2-. Ces méthodes requièrent cependant la solution de plusieurs équations transcendantes impliquant une quantité de matériel ou un temps de calcul tels qu'il est impossible d'en envisager la généralisation à des problèmes de dimensions réalistes.

1 - RAPPEL DE LA FORMULATION D'UN PROBLEME A VALEURS LIMITES EN PLUSIEURS POINTS -

Cette formulation a fait l'objet du chapitre précédent et n'est rappelée ici que pour référence, donc munie seulement de ses caractéristiques essentielles.

† Une grande partie de cette étude a été réalisée en collaboration avec le centre de calcul hybride de la Société EAI à BRUXELLES. Qu'il nous soit ici permis de remercier particulièrement Messieurs W. CLAES (Directeur du Centre) et A. STEVEN (Ingénieur) pour leur apport scientifique et leur expérience de l'hybride.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) & (4) \quad \underline{x}(t_0) &= \underline{x}_0 \\
 (2) \quad \dot{\underline{\lambda}} &= - \underline{H}_{\underline{x}} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{u}, t) & (5) \quad \underline{\lambda}(t_0) + T &= \underline{0} \\
 (3) \quad H_{\min/\underline{u}} &\Rightarrow \underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) \in \Omega \text{ fermé}
 \end{aligned}$$

Pendant certaines périodes non déterminées $[t_i, t_j]$, où $N(\underline{x}, t) = 0$ (6), les définitions de (1) et (2) peuvent changer avec éventuellement des discontinuités sur $\underline{x}$ et $\underline{\lambda}$ en t_i et t_j . La commande $\underline{u}$ est alors généralement déterminée, tandis que l'Hamiltonien peut aussi présenter des discontinuités en t_i et t_j .

Commentaires : Les conditions initiales (4) ont été choisies conformes à la réalité d'une commande "en ligne" et les conditions finales (5) dans une forme simple qui ne réduit en rien la généralité des résultats ci-dessous.

Exemple : Pour le système de classe 2 suivant, qui figure le fonctionnement de la pression au ballon (x_1) du générateur de vapeur pilote :

$$\dot{x}_1 = a x_2 \quad (7) \quad x_1(0) = x_{10} \quad (9)$$

$$\dot{x}_2 = k u \quad (8) \quad x_2(0) = x_{20} \quad (10)$$

et le critère de performance : $J = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + \alpha^2 u^2) dt$,

les conditions d'optimalité sont :

$$\lambda_1 = -x_1 \quad (11) \quad \lambda_1(T) = 0 \quad (14)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -a \lambda_1 \quad (12) \quad \lambda_2(T) = 0 \quad (15)$$

$$u = -\frac{k}{\alpha^2} \lambda_2 \quad (13)$$

Si u est borné par $|u| \leq C$, il prend la valeur $\pm C$ lorsque l'expression (13) dépasse C en valeur absolue.

Si x_2 , qui représente l'énergie introduite dans le circuit évaporatoire, est aussi soumis à des contraintes : $B_1 \leq x_2 \leq B_2$ (16), la variable λ_2 s'annule pendant les périodes où $x_2 = B_1$ ou B_2 et est continue, de même que λ_1 sur $[0, T]$.

Ces résultats sont aisément vérifiés à l'aide du dernier paragraphe du chapitre III précédent.

2 - LES METHODES DE NEWTON ET DU GRADIENT -

On peut dire que, même s'il n'en subsiste souvent que la structure, ces deux méthodes sont à la base de la presque totalité des algorithmes de résolution des problèmes à valeurs limites en plusieurs points. Nous les rappelons ici sous leur version la plus dépouillée.

2-1 La méthode de NEWTON

Soit une fonction $h(x)$ dont on cherche le zéro $\hat{x}$ ($h(\hat{x}) = 0$).

Pour établir un algorithme itératif, la question est la suivante :

Si $x^i = a$ ($\dagger$), comment doit-on choisir $x^{i+1} = a + k$, pour que x^i converge rapidement vers $\hat{x}$?

Ecrivons que $h(x^{i+1}) = h(a + k) = 0$

Or $h(a + k) \approx h(a) + k h'(a)$

Donc $k = -h(a) / h'(a)$

et $x^{i+1} = x^i - h(x^i) / h'(x^i)$

(algorithme de NEWTON) (cf. figure 1).

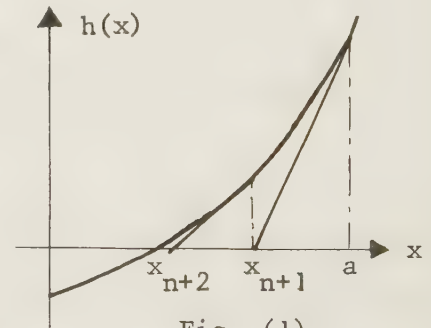


Fig. (1)

Pour le cas multidimensionnel, on trouve de façon semblable :

$$\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i - H_{\underline{x}}^{-1}(\underline{x}^i) \underline{h}(\underline{x}^i) \quad (17)$$

où $\dim \underline{h} = \dim \underline{x}$

et $H_{\underline{x}} = \text{Jacobien}$

Remarques : 1) On peut aisément vérifier sur une courbe non monotone que la convergence de la méthode est liée au choix initial x^0 . Notamment des difficultés apparaissent lorsque $\det H_{\underline{x}} \neq 0$.

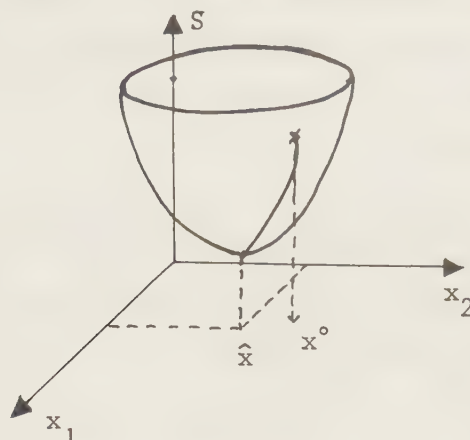
2) S'il y a convergence, celle-ci est quadratique. Ceci signifie que si $x^i - \hat{x} = 10^{-1}$, $x^{i+1} - \hat{x} = 10^{-2}$, $x^{i+2} - \hat{x} = 10^{-4}$, ...

2-2 La méthode du gradient

Alors que la méthode de NEWTON concerne les zéros d'une fonction, celle du gradient permet d'en obtenir les minimums.

$\dagger$ On placera les indices d'itération en haut.

Soit la fonction $S(\underline{x})$ à minimaliser de manière itérative en partant de $\underline{x}^i$ (cf. visualisation dans l'espace à trois dimensions - figure 2).



$$\text{Posant } \underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i + \underline{k}$$

On cherche $\underline{k}$ qui rend la chute de S maximale

$$\text{Soit } S(\underline{x}^i + \underline{k}) - S(\underline{x}^i) \mid \max_{\underline{k}} \quad (18)$$

$$\text{Comme } S(\underline{x}^i + \underline{k}) = S(\underline{x}^i) + \underline{k}^T \underline{S}_{\underline{x}}$$

Le produit scalaire sera de module maximal si

$$\underline{k} = \beta \underline{S}_{\underline{x}}$$

Ainsi pour une minimalisation de S , on aura

$$\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i + \beta \underline{S}_{\underline{x}} \quad \text{avec } \beta < 0 \quad (19)$$

β est le paramètre crucial dont dépend la rapidité de convergence. Bien que ce type de méthode ait beaucoup de succès, sa lenteur de convergence est également bien connue et un tel inconvénient ne peut être atténué qu'au prix d'une complication résultant de l'adjonction du calcul du β qui maximise (18) (gradient conjugué), ou mieux de l'utilisation d'un β inspiré par la méthode de NEWTON.

En effet, minimaliser S c'est aussi chercher à annuler $\underline{S}_{\underline{x}}$. Si pour obtenir $\underline{S}_{\underline{x}} = 0$, on applique l'algorithme de NEWTON, on trouve d'après (17)

$$\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i - \underline{S}_{\underline{xx}}^{-1}(\underline{x}^i) \underline{S}_{\underline{x}}(\underline{x}^i) \quad (20)$$

β est ici devenu une matrice $(-\underline{S}_{\underline{xx}}^{-1})$ qui nécessite une inversion matricielle. Il est cependant possible de remplacer $\underline{S}_{\underline{xx}}^{-1}$ par une matrice ne nécessitant pas de calculs complexes et ayant au voisinage de l'optimum

les caractéristiques de S_{xx}^{-1} (algorithme de FLETCHER et POWELL).

Sans aller plus avant dans les méthodes bien connues de programmation non linéaire, il nous est apparu important de mettre l'accent sur deux méthodes fondamentales et qui d'ailleurs, ainsi qu'on vient de le voir, sont susceptibles de se combiner.

Avant d'examiner les facultés d' "hybridisation" de telle ou telle méthode lors de son application à un problème d'optimisation avec contraintes, il est utile de préciser l'adaptation des méthodes de NEWTON et du gradient à la résolution d'un problème à valeurs limites en deux points (équations (1) à (5)).

3 - APPLICATION DES METHODES DE NEWTON ET DU GRADIENT A LA RESOLUTION DES PROBLEMES A VALEURS LIMITEES EN DEUX POINTS -

Utilisant l'expression (3) dans les équations (1) et (2), le problème (1) à (5) devient :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) \quad (21) \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (23)$$

$$\dot{\underline{\lambda}} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) \quad (22) \quad \underline{\lambda}(t_0 + T) = 0 \quad (24)$$

La solution $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) (\in \Omega)$ (cf. (3)) serait intégrable si l'on disposait par exemple de $\underline{\lambda}(t_0)$. Une méthode d'itération sur des variables consistera donc à rechercher itérativement le vecteur $\underline{\lambda}(t_0)$ qui permette d'intégrer (21) et (22) et satisfasse (24).

D'autre part, on remarque que la connaissance de $\underline{\lambda}(t)$ (pour $t \in [t_0, t_0 + T]$) permettrait d'intégrer (21) et donc d'avoir $\underline{u}(t)$ (3). De même celle de $\underline{x}(t)$ pour $t \in (t_0, t_0 + T)$, autoriserait l'intégration de (22) à partir de (24) et fournirait également $\underline{u}(t)$. Il est donc aussi possible d'itérer sur des fonctions ($\underline{\lambda}(t)$ et $\underline{x}(t)$), pour parvenir à la solution en $\underline{u}(t)$.

On se propose ici d'examiner l'adaptation des méthodes de NEWTON et du gradient pour chacun des processus d'itération.

3-1 Itération sur des variables

Nous ne considérerons, par simplicité, que le problème [(21)(24)] et des itérations sur $\underline{\lambda}(t_0) = \underline{\lambda}_0$.

3-1-1 Application de la méthode de NEWTON - matrice de sensibilité

Le vecteur $\underline{\lambda}(T)$ est une fonction de $\underline{x}_0$ et $\underline{\lambda}_0$ à valeurs obtenues par intégration de (21) et (22).

$$\text{Ecrivons } \underline{\lambda}(T) = \underline{h}(\underline{x}_0, \underline{\lambda}_0) \quad (25)$$

qu'il faut annuler par un choix judicieux de $\underline{\lambda}_0$.

$\underline{x}_0$ étant donné, l'algorithme (17) s'écrit

$$\underline{\lambda}_0^{i+1} = \underline{\lambda}_0^i - H_{\lambda}^{-1}(\underline{\lambda}_0^i) h(\underline{x}_0, \underline{\lambda}_0^i) \quad (26)$$

$$\text{où } H_{\lambda} = \left[\frac{\partial \lambda_i(T)}{\partial \lambda_{j_0}} \right] \quad (27)$$

Remarques : 1) Si $\underline{f}$ et $\underline{g}$ (cf. (21) (22)) sont linéaires, H_{λ} n'est autre que la matrice de transition entre $\underline{\lambda}_0$ et $\underline{\lambda}(T)$. Dans ce cas simple, on préférera employer une version élémentaire la "méthode du tir".

2) Si $\underline{f}$ et $\underline{g}$ ne sont pas linéaires, on pourra les approximer en les linéarisant (c'est-à-dire en utilisant les équations de perturbation) et en calculant la matrice de transition correspondante. Un autre moyen consiste à déterminer expérimentalement la matrice de sensibilité $\left[\frac{\delta \lambda_i(T)}{\delta \lambda_{j_0}} \right]$ qui jouera le rôle de H_{λ} .

C'est évidemment cette dernière version qui non seulement sur le plan théorique est la plus valable (si $\delta \lambda_{j_0}$ est bien choisi) mais présente aussi de grandes facultés d'adaptation à l'hybride qui permet de nombreuses intégrations analogiques.

3-1-2 Application de la méthode du gradient

Cette fois, au lieu de chercher à annuler $\underline{\lambda}(T)$, on essaie de minimiser une fonction de $\underline{\lambda}(T)$ dont le minimum est manifestement donné par $\underline{\lambda}(T) = 0$ (but recherché). Par exemple : $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2(T)$ qu'on pose donc égal à S , conformément au paragraphe 2-2.

En fait, $S = S(\underline{x}_0, \underline{\lambda}_0)$ avec $\underline{x}_0$ fixé

Appliquant l'algorithme (19)

$$\underline{\lambda}_0^{i+1} = \underline{\lambda}_0^i + \beta S_{\underline{\lambda}_0} \quad (28)$$

De même que précédemment le vecteur S_{λ_0} peut être calculé expérimentalement sur calculateur analogique.

L'inconvénient majeur de ce type de méthode réside dans le principe même, qui néglige l'information concernant la valeur (nulle) du minimum du critère.

3-1-3 Remarque sur la méthode d'itération sur les variables

Dans chacun des cas ci-dessus, que ce soit pour le calcul de $\left[\frac{\delta \lambda_i(T)}{\delta \lambda_{j_0}} \right]$ ou pour celui de $\left[\frac{\delta s}{\delta \lambda_{i_0}} \right]$, il est nécessaire d'intégrer l'équation en λ (22) dans le sens direct, sens dans lequel elle est généralement très sensible. Dans le cas linéaire, notamment, il est aisé de remarquer que les $\lambda_i(T)$ sont constituées de différences de fonctions hyperboliques.

Plus généralement, les équations (21) et (22) étant adjointes, (21) sera stable dans le sens d'intégration où (22) est instable et inversement.

3-2 Itération sur des fonctions (trajectoires)

Précisément, la caractéristique fondamentale de ces méthodes est l'intégration non simultanée de (21) et (22), qui permet d'opérer pour chacune dans le sens où elle est stable.

3-2-1 Application de la méthode de NEWTON - quasi linéarisation

On cherche les fonctions $\underline{x}(t)$ et $\underline{\lambda}(t)$ ($t \in [t_0, t_0 + T]$) qui vérifient (21) et (22).

$$\text{C'est-à-dire } \dot{\underline{x}} - \underline{f} = \underline{h}_A(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) = 0 \quad (29)$$

$$\text{et } \dot{\underline{\lambda}} - \underline{g} = \underline{h}_B(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) = 0 \quad (30)$$

$$\text{avec } \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (31)$$

$$\text{et } \underline{\lambda}(t_0 + T) = 0 \quad (32)$$

Reprenant le principe de la méthode de NEWTON du § 2-1 et possédant $\underline{x}^i(t)$ et $\underline{\lambda}^i(t)$, on choisira $\delta \underline{x} = \underline{x}^{i+1} - \underline{x}^i$ et $\delta \underline{\lambda} = \underline{\lambda}^{i+1} - \underline{\lambda}^i$ tels que :

$$h_A(\underline{x}^i + \delta \underline{x}, \underline{\lambda}^i + \delta \underline{\lambda}, t) = 0 \quad (33)$$

$$\text{et } h_B(\underline{x}^i + \delta \underline{x}, \underline{\lambda}^i + \delta \underline{\lambda}, t) = 0 \quad (34)$$

Le développement au premier ordre de (33) et (34) donne à l'aide de (29) et (30) :

$$\dot{\underline{x}}^{i+1} = \underline{f}(\underline{x}^i, \underline{\lambda}^i, t) - F_x(\underline{x}^i, \underline{\lambda}^i, t)(\underline{x}^{i+1} - \underline{x}^i) - F_\lambda(\underline{x}^i, \underline{\lambda}^i, t)(\underline{\lambda}^{i+1} - \underline{\lambda}^i) \quad (35)$$

$$\dot{\underline{\lambda}}^{i+1} = \underline{g}(\underline{x}^i, \underline{\lambda}^i, t) - G_x(\underline{x}^i, \underline{\lambda}^i, t)(\underline{x}^{i+1} - \underline{x}^i) - G_\lambda(\underline{x}^i, \underline{\lambda}^i, t)(\underline{\lambda}^{i+1} - \underline{\lambda}^i) \quad (36)$$

qui constituent, avec $\underline{x}^{i+1}(t_0) = \underline{x}_0$ (37)

$$\text{et } \underline{\lambda}^{i+1}(t_0 + T) = \underline{0} \quad (38)$$

l'algorithme de quasi linéarisation.

Ayant mis en mémoire $\underline{x}^i(t)$ et $\underline{\lambda}^i(t)$ à l'itération i , on intègre, dans le sens direct, (35) à partir de (37) puis, à rebours, (36) à partir de (38). Le processus se termine quand $\underline{x}^{i+1}(t) \approx \underline{x}^i(t)$ et $\underline{\lambda}^{i+1}(t) \approx \underline{\lambda}^i(t)$ - c'est-à-dire, s'il y a eu convergence, pour la vérification de (29) à (32). -

3-2-2 Application de la méthode du gradient - gradient fonctionnel

La fonction S (du § 2-2) à minimaliser est ici devenue la fonctionnelle J . Au même titre que dans 2-2 on cherchait le $\Delta \underline{x}(\underline{x}^{i+1} - \underline{x}^i)$ qui maximisait $|\Delta S| (|S(\underline{x}^{i+1}) - S(\underline{x}^i)|)$, on veut maintenant obtenir le $\delta \underline{\lambda}(t)$ (ou le $\delta \underline{u}(t)$, ce qui, hors contrainte revient au même d'après (3) qui maximise $|\delta J| (|J(\underline{u}^{i+1}(t)) - J(\underline{u}^i(t))|)$.

Or, on a vu au chapitre précédent que si (2) est vérifié δJ s'exprime par le produit scalaire :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_0+T} \underline{H}_u^T \delta \underline{u} dt \quad (39)$$

et donc J décroît selon "la plus grande pente" si $\delta \underline{u}(t) = \beta \underline{H}_u$

soit si $\underline{u}^{i+1}(t) = \underline{u}^i(t) + \beta \underline{H}_u(\underline{x}^i, \underline{\lambda}^i, \underline{u}^i, t)$ (40).

Il n'est pas utile de s'appesantir sur le choix de β que l'on trouvera notamment en -3- et -4-, mais plutôt sur le principe de l'algorithme qui en découle.

De même que pour la quasi linéarisation, chaque itération contient deux intégrations : l'équation $\dot{\underline{x}}^{i+1} = \underline{f}(\underline{x}^{i+1}, \underline{u}^i, t)$ est intégrée à

partir de $\underline{x}$ en utilisant la fonction $\underline{u}^i(t)$ mémorisée à l'itération précédente, puis $\dot{\underline{\lambda}}^{i+1} = \underline{g}(\underline{x}^i, \underline{\lambda}^{i+1}, \underline{u}^i, t)$ † est intégrée à rebours à partir de $\underline{\lambda}(t_0 + T) = 0$. Pendant ce second balayage, le calcul de $\underline{H}_u$ permet de mémoriser la nouvelle commande $\underline{u}^{i+1}(t)$ par emploi de (40).

On peut déjà remarquer que ce type de méthode est bien adapté à l'hybride puisque si des intégrations analogiques sont évidemment souhaitables, la mémorisation de fonction est en revanche plus aisée en numérique.

De nombreuses variantes de cette méthode de gradient, introduisant plus ou moins de complexité, afin d'en améliorer la vitesse de convergence, abondent dans la littérature.

3-3 Conclusion

Ainsi qu'on l'a vu l'examen de deux des méthodes les plus importantes de l'analyse numérique, qui sont à la base de la quasi totalité des algorithmes de résolution des problèmes à valeurs limites en deux points, a permis de dégager deux types d'algorithmes :

1) Des méthodes d'itération sur les variables $\underline{\lambda}_0$, dont l'une, celle des matrices de sensibilité, possède les caractéristiques de convergence quadratique de la méthode de NEWTON et que nous retiendrons pour le passage à un problème d'optimisation avec contraintes - plutôt que la méthode du gradient qui néglige la connaissance de la valeur du minimum de S -.

2) Des méthodes d'itération sur la fonction $\underline{u}(t)$ (ou $\underline{\lambda}(t)$), qui permettent d'intégrer les équations en $\underline{\lambda}$ et $\underline{x}$ dans le sens où elles sont stables.

Rappelons (cf. dernier paragraphe du chapitre précédent) que le problème à valeurs limites en plusieurs points que nous allons maintenant résoudre concerne un processus linéaire muni d'un critère quadratique et de contraintes inégalités linéaires. En conséquence, une méthode telle que la quasi linéarisation ne s'impose guère. Comme d'autre part la méthode du gradient possède une convergence lente, à moins d'y adjoindre de nombreux calculs analytiques (cf. -4-), on tentera d'améliorer ce type d'algorithme dont la notion fondamentale réside dans l'intégration dans les deux sens.

† Si $\underline{x}^i$ peut ici être remplacé par $\underline{x}^{i+1}$.

4 - REGULATION OPTIMALE AVEC COMMANDE ET ETAT CONTRAINTS -

Nous atteignons le point fondamental et concret de la régulation optimale en présence de perturbations de grande amplitude : l'obtention de la commande optimale par algorithme de résolution des problèmes à valeurs limites en plusieurs points.

C'est, bien entendu, au générateur de vapeur que nous avons emprunté les exemples d'illustration, mais les algorithmes utilisés ne sont pas restreints à ces cas particuliers. Des butées régissent les débits de combustible et de désurchauffe et des contraintes peuvent être imposées sur les dérivées de ces derniers.

En premier lieu, l'exemple du double intégrateur correspondant à la chaîne de pression au ballon et décrit précédemment en 1, permet une compréhension rapide du mécanisme de l'algorithme de sensibilité et de ses limites. Il est alors préférable d'avoir recours à une méthode d' "intégration dans les deux sens" qui a subi une amélioration notable à la lumière de l'expérience acquise par la Société EAI (BRUXELLES) dans la résolution des équations aux dérivées partielles. L'algorithme résultant, dit "des dérivées partielles", a été testé en simulation sur le modèle de l'ensemble pression température de surchauffe du générateur de vapeur, soit donc pour un processus à cinq états, dont deux contraintes et deux commandes éventuellement contraintes.

4-1 Méthode de sensibilité

Pour faciliter la compréhension on rappellera ici l'exemple déjà décrit dans les équations (7) à (16).

Les équations d'état sont :

$$\dot{x}_1 = a x_2 \quad (41)$$

$$x_1(0) = x_{10} \quad (43)$$

$$\dot{x}_2 = k u \quad (42)$$

$$x_2(0) = x_{20} \quad (44)$$

où la présence de l'état x_2 (un débit) peut aussi bien être considérée comme nécessitée par la formulation du critère (présence de $\dot{x}_2^2$ dans l'intégrand) que due à l'utilisation d'une vanne motorisée (k = gain du moteur intégrateur).

Si le critère de performance est $J = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + \alpha^2 u^2) dt$, les conditions d'optimalité s'écrivent :

$$\dot{\lambda}_1 = -x_1 \quad (45)$$

$$\lambda_1(T) = 0 \quad (48)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -a \lambda_1 \quad (46)$$

$$\lambda_2(T) = 0 \quad (49)$$

$$u = -\frac{k}{\alpha_2} \lambda_2 \quad (47)$$

En présence de contraintes sur la commande ($|u| \leq C$), u prend la valeur $\pm C$ quand (47) dépasse C en valeur absolue.

Si, de plus, x_2 est régi par $B_1 \leq x_2 \leq B_2$, la variable adjointe correspondante λ_2 s'annule (ou disparaît) pendant les périodes où $x_2 = B_1$ ou B_2 . λ_1 et λ_2 restent continues sur $[0, T]$.

En présence de contraintes un ensemble de "trajectoires type" pour x_2 , λ_2 et u est le suivant :

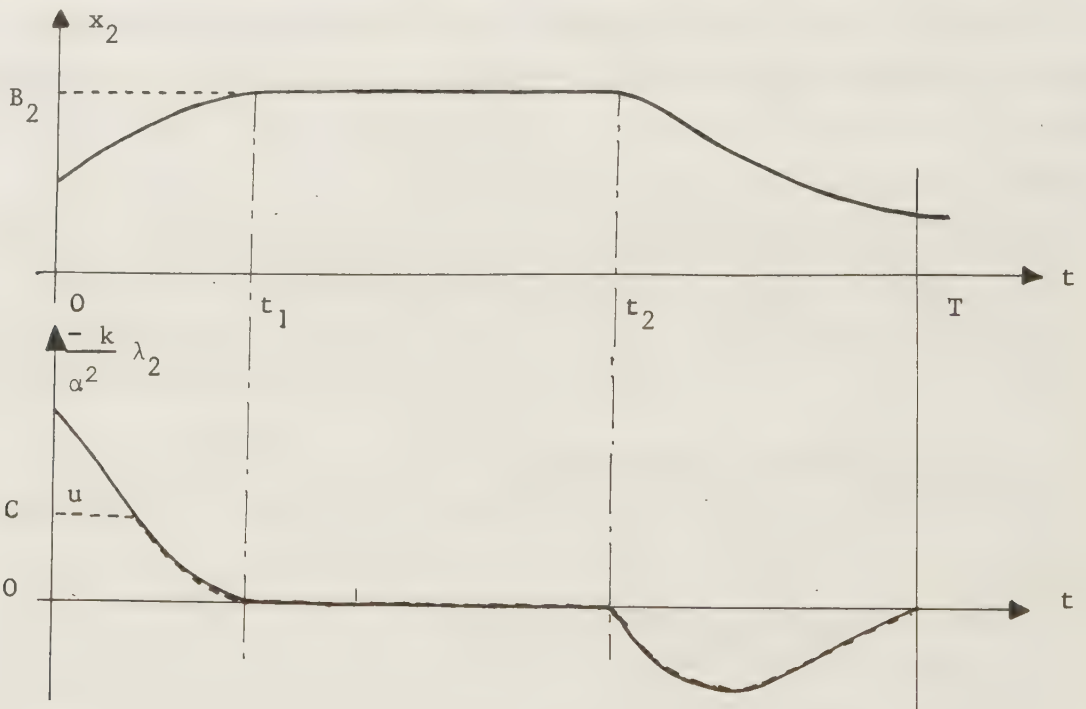


Fig. (1)

Dans un premier stade on recherche la trajectoire optimale en l'absence de contrainte sur l'état. Autrement dit, B_2 est supposé ∞ . Ceci fournit des informations sur la forme probable des trajectoires contraintes ainsi que sur les instants probables d'entrée et de sortie de contraintes.

Pour cela, on utilise l'algorithme (26) ($\lambda_{-0}^{i+1} = \lambda_{-0}^i - H_{\lambda}^{-1} \lambda_{-0}^i(T)$) avec $H_{\lambda} = \left(\frac{\delta \lambda_i(T)}{\delta \lambda_{j0}} \right)$ calculée expérimentalement sur machine analogique par intégration de (41) à (47). L'initialisation λ_{-0}^0 et les signaux tests $\delta \lambda_{-j0}$ sont déterminés numériquement.

A ce propos, on sait que la convergence de (26) est largement tributaire (quand u est contraint, c'est-à-dire quand les équations sont non linéaires) de son initialisation $\underline{\lambda}_0^0$ qui par ailleurs est bien difficile à situer. En revanche, les valeurs finales $x_1(T)$ et $x_2(T)$ peuvent, par référence au phénomène physique qu'elles représentent, être plus aisément prédites. Une variante de la méthode consiste donc à itérer sur $\underline{x}(T)$ pour satisfaire $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$, soit :

$$\underline{x}^{i+1}(T) = \underline{x}^i(T) - H_x^{-1}(\underline{x}^i(0) - \underline{x}_0) \quad (48)$$

$$\text{avec } H_x = \left[\frac{\delta(x_i(0) - x_{i0})}{\delta x_j(T)} \right] \quad (49)$$

Cette fois, H_x est obtenu par intégration à rebours de (41) à (47).

Le deuxième stade concerne la prise en considération de la contrainte sur l'état, et se présente quelque peu différemment selon que l'on itère sur $\underline{\lambda}_0$ ou sur $\underline{x}(T)$.

Considérons à nouveau l'itération sur $\underline{\lambda}_0$.

La trajectoire x_2 , sans contrainte, fournit un instant t_2^0 , où $x_2 = B_2$. De même, la variable correspondante λ_2 s'annule en un instant t_1^0 .

Si, donc, on applique à nouveau l'algorithme (26), en gelant λ_2 à 0 au premier passage par zéro de λ_2 , (c'est-à-dire en t_1^0 à la première itération) et en le libérant en t_2^0 , on obtiendra des trajectoires telles que celles de la figure 1 mais avec une valeur maximale (B_m) de x_2 différente de B_2 imposée.

L'instant de sortie de contrainte est alors ajusté à l'aide de $t_2^{i+1} = t_2^i + k(B_m - B_2)$, de telle sorte que l'on tende vers B_2 et $\underline{\lambda}(T) = 0$ après une nouvelle itération sur $\underline{\lambda}_0$ (26).

On obtient ainsi pour le problème considéré et pour des coefficients du critère (α et T) plausibles, des temps de résolution de l'ordre de la seconde, compatibles avec les impératifs de commande en ligne d'un générateur de vapeur. On trouvera dans -5- le détail des programmes.

Le processus global d'itération n'est évidemment pas unique dans la mesure où l'on se réfère largement à la forme des trajectoires pour l'établir. C'est là un inconvénient majeur de cette méthode qui risque d'en-

gendrer son lot d'astuces de mise au point à chaque nouveau problème et qui ainsi nous éloigne des algorithmes généraux souhaités.

De plus, ce genre de méthode recèle un inconvénient majeur bien connu : les matrices de sensibilité sont souvent très imprécises en raison de l'instabilité (ou de la sensibilité) d'une partie des équations intégrées (le système physique ou le système adjoint - qui d'ailleurs dans l'exemple développé ici sont tous deux instables -). D'où l'idée de n'intégrer des équations différentielles que dans le sens où elles sont stables, idée que nous développons maintenant.

4-2 Méthode des dérivées partielles

Nous avons vu au paragraphe 3-2-2 qu'une méthode d'itération sur les trajectoires requiert, à chaque itération, pour un problème à valeurs limites en deux points :

- d'une part l'intégration de $\dot{\underline{x}}^{i+1} = \underline{f}(\underline{x}^{i+1}, \underline{u}^i, t)$ de t_0 à $t_0 + T$, à partir de $\underline{x}^{i+1}(t_0) = \underline{x}_0$ (50)

- d'autre part l'intégration de $\dot{\underline{\lambda}}^{i+1} = \underline{g}(\underline{x}^i, \underline{\lambda}^{i+1}, \underline{u}^i, t)$ de $t_0 + T$ à t_0 , à partir de $\underline{\lambda}^{i+1}(t_0 + T) = 0$ (51)

Les fonctions résultantes $\underline{x}^{i+1}(t)$ et $\underline{\lambda}^{i+1}(t)$ permettent de déterminer $\underline{u}^{i+1}(t)$ qui sera utilisé dans l'itération $i + 2$. Cette détermination peut s'effectuer à l'aide de l'algorithme (40), ou bien - ce qui revient au même en l'absence de contraintes sur la commande et ce qui est nécessaire en leur présence - au moyen de l'expression généralement explicite de $\underline{u}^*(\underline{x}, \underline{\lambda}, t)$ fourni par $H_{\min/\underline{u}}$.

Si, maintenant, des contraintes ou des butées régissent également le vecteur d'état, on adjoindra les conditions d'optimalité supplémentaires, stipulées au chapitre III, lors des intégrations.

Examinons par exemple le problème du paragraphe précédent :

Si, lors de l'intégration dans le sens direct, x_2 dépasse la contrainte B_2 sur la période $[t_1, t_2]$ (cf. figure 1), λ_2 sera gelé à zéro sur $[t_2, t_1]$ lors de l'intégration à rebours. De cette manière, λ_2 est continu en t_1 ; il reste à enforcer la continuité en t_2 . Ceci peut s'effectuer naturellement grâce aux interpolateurs analogiques qui "rejouent" $\underline{\lambda}(t)$ stocké en digital, lors de l'intégration de l'équation en $\underline{x}$.

On voit donc que si l'introduction de contraintes sur l'état amène, bien entendu, quelques additifs au programme, celui-ci est, en revanche, indépendant de toute connaissance a priori de la forme des trajectoires optimales.

Malheureusement, il est notoire que ce type de méthode présente une certaine lenteur de convergence - qui se transforme même en divergence dans certains cas rencontrés lors d'essais sur modèle chaudière -. Aux méthodes du second ordre, qui entraînent un supplément de calcul important et qui s'adaptent difficilement aux problèmes à valeurs limites en plusieurs points, nous avons préféré un autre procédé motivé par l'expérience EAI dans le traitement hybride des équations aux dérivées partielles.

4-2-1 Principe de la "méthode des dérivées partielles"

La divergence possible de la méthode exposée ci-dessus peut s'expliquer par des corrections trop importantes de trajectoires à chaque itération. Une solution consiste donc à introduire cette correction dans le processus d'itération de telle sorte qu'elle soit ajustable à une faible valeur quand cela est souhaitable. Ainsi l'intégration de $\dot{\underline{x}}^{i+1} = \underline{f}(\underline{x}^{i+1}, \underline{u}^i, t)$ est modifiée comme indiqué sur la figure 2.

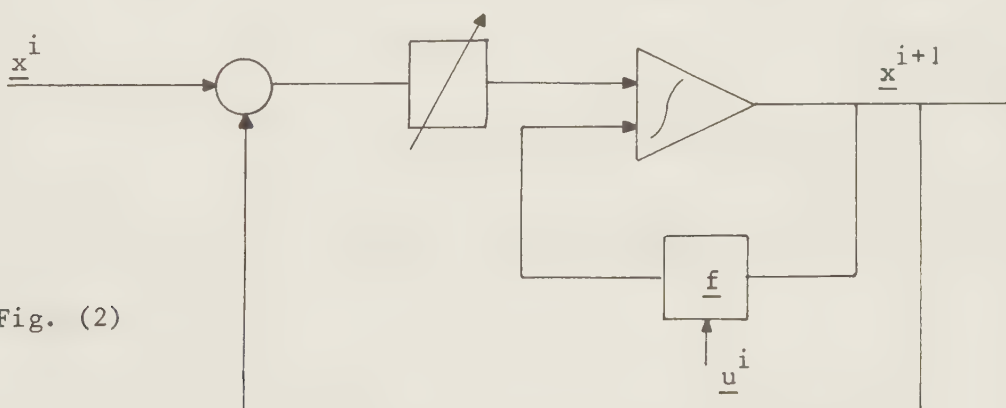


Fig. (2)

(50) et (51) deviennent donc

$$K_1 (\underline{x}^{i+1} - \underline{x}^i) = \dot{\underline{x}}^{i+1} - \underline{f}(\underline{x}^{i+1}, \underline{u}^i, t) \quad (52)$$

$$\underline{x}^{i+1}(t_0) = \underline{x}_0$$

$$K_2 (\underline{\lambda}^{i+1} - \underline{\lambda}^i) = \underline{\lambda}^{i+1} - \underline{g}(\underline{x}^{i+1}, \underline{\lambda}^{i+1}, \underline{u}^i, t) \quad (53)$$

$$\underline{\lambda}^{i+1}(t_0 + T) = 0$$

(K_1, K_2 = matrices)

à quoi il faut bien sûr adjoindre les conditions d'optimisation supplémentaires inhérentes aux contraintes sur l'état. Un autre point de vue menant aux mêmes équations (52) et (53) utilise l'expérience de la résolution hybride des échangeurs de chaleur.

Les équations suivantes représentent en effet le comportement d'un échangeur de chaleur à contre courant, pour lequel l'algorithme hybride de résolution est réputé convergent

$$\begin{aligned} V \frac{\underline{x}}{\eta} &= \underline{x}_t - \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) & \underline{x}(t_0, \eta) &= \underline{x}_0 \\ & & \underline{x}(t, 0) &\text{ quelconque} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} W \frac{\underline{\lambda}}{\eta} &= \underline{\lambda}_t - \underline{g}(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{u}, t) & \underline{\lambda}(t_0 + T, \eta) &= 0 \\ & & \underline{\lambda}(t, 0) &\text{ quelconque} \end{aligned} \quad (55)$$

La solution hybride d'un tel système aux dérivées partielles en $\underline{x}(t, \eta)$ et $\underline{\lambda}(t, \eta)$ requiert la discrétisation suivant l'une des variables t, η .

Dans le problème de commande optimale, recherchant bien entendu $\underline{x}(t)$ et $\underline{\lambda}(t)$, on discrétisera donc suivant η et la solution $\underline{x}(t)$, $\underline{\lambda}(t)$ sera atteinte lorsque $\underline{x}(t, \eta)$ et $\underline{\lambda}(t, \eta)$ deviendront indépendants de η . (Régime permanent en η).

Formellement, ceci se traduit par :

$$\begin{aligned} V \frac{\underline{x}(t, \eta) - \underline{x}(t, \eta - \Delta \eta)}{\Delta \eta} &= \underline{x}_t(t, \eta) - \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \underline{x}(t_0, \eta) &= \underline{x}_0 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} W \frac{\underline{\lambda}(t, \eta) - \underline{\lambda}(t, \eta - \Delta \eta)}{\Delta \eta} &= \underline{\lambda}_t(t, \eta) - \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t) \\ \underline{\lambda}(t_0 + T, \eta) &= 0 \end{aligned} \quad (57)$$

qui sont (52) et (53) avec $\frac{V}{\Delta \eta} = K_1$ et $\frac{W}{\Delta \eta} = K_2$.

Les matrices V, W sont choisies aussi simples que possible, c'est-à-dire diagonales avec éventuellement même certains termes diagonaux nuls, ce qui ramène en partie à la méthode précédente (cf. § 3-2-2).

4-2-2 Solution hybride

Pour chaque itération :

- (56) est intégrée analogiquement dans le sens direct à l'aide des trajectoires $\underline{u}^i$ et $\underline{x}^i$ mémorisés en digital (100 points) et "rejoués" par les convertisseurs digitaux analogiques à l'aide de bloqueurs d'ordre 1 analogiques (unités Track/store).

- (57), muni des conditions d'optimalité supplémentaires et de $H_{\min}$ qui fournit $\underline{u}^{i+1}$ à tout instant, est intégrée à rebours à l'aide des fonctions "rejouées" $\underline{u}^i$, $\underline{x}^i$ et $\underline{\lambda}^i$.

- simultanément, les trajectoires $\underline{u}^{i+1}$, $\underline{x}^{i+1}$, $\underline{\lambda}^{i+1}$ sont échantillonnées à l'aide de Track/store et mises en mémoire digitale par l'intermédiaire des convertisseurs analogiques digitaux.

Le programme numérique assure le déroulement logique de ces opérations ainsi que le choix de V, W et $\Delta \eta$.

4-2-3 Application au générateur de vapeur (simulation)

L'application concerne un modèle légèrement différent de celui de l'annexe (§ 2-2-3) et qui fut considéré comme le meilleur au moment de cette étude.

Ayant en effet constaté l'existence d'une dynamique importante sur le thermocouple mesurant la température de vapeur surchauffée, nous avons fait en sorte de construire un modèle permettant, vis-à-vis de l'optimisation, de diminuer d'une unité la dimension du vecteur d'état en insérant dans le critère de performance non pas la température mesurée mais la "température réelle" supposée.

Soit formellement :

$$\dot{x}_1 = a x_2 + b x_4 - b q_s$$

$$\dot{x}_2 = u_1$$

$$\dot{x}_3 = c x_1 + d x_2 - c x_3 - f x_4 - g q_s + h$$

$$\dot{x}_4 = u_2$$

$$\dot{x}_5 = j (x_3 - x_5)$$

$$p_s = x_1 - 1 \left(\frac{q_s}{1000} \right)^2$$

$$t_s = x_5$$

x_1 = pression ballon

x_2 = débit fuel

x_3 = température réelle surchauffe

x_4 = débit eau désurchauffe

t_s = température mesurée surchauffe

p_s = pression surchauffe

q_s = débit vapeur surchauffe

Le critère de performance est :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} (x_3^2 + \alpha^2 p_s^2 + \delta^2 u_1^2 + \epsilon^2 u_2^2) dt$$

et on a des butées sur x_2 et x_4 : $A_1 \leq x_2 \leq A_2$, $B_1 \leq x_4 \leq B_2$

Les conditions d'optimalité sont directement obtenues par application des résultats du § 3 du chapitre précédent. Elles se traduisent notamment par l'annulation de λ_2 (resp. λ_4) quand $x_2 = A_1$ ou A_2 (resp. $x_4 = B_1$ ou B_2).

On trouvera dans -5- les détails de programme et de câblage qu'il nous est apparu superflu de reproduire ici.

L'illustration de la méthode est fournie par les figures 3 et 4. La première concerne des trajectoires optimales types, vis-à-vis d'un critère où t_0 est un instant fixe. On observera notamment les butées sur les débits de fuel et d'eau de désurchauffe. La figure 4 est relative à la convergence de l'algorithme qui peut donc nécessiter 3 à 400 itérations.

Le temps de convergence est de l'ordre de la minute sur la 690 du centre EAI de BRUXELLES. Cependant, l'emploi de convertisseurs analogiques digitaux plus performants (actuellement le constructeur dispose de convertisseurs dont le temps de conversion est de 10 μ s) diminuerait les durées des intégrations analogiques dont les limitations sont dues beaucoup moins à la technologie analogique qu'au nombre et au temps de lecture des courbes à mettre en mémoire. On a pu estimer que pour le problème considéré l'utilisation d'une machine 690, ainsi équipée, permettrait d'abaisser le temps de convergence à une valeur avoisinant 2 secondes, qui deviendrait compatible avec les impératifs de commande en ligne.

5 - CONCLUSION -

Il nous a semblé que nous ne laisserions pas les utilisateurs éventuels indifférents en montrant que deux méthodes simples et bien connues - les méthodes de NEWTON et du gradient - sont à la base des meilleurs algorithmes de résolution des systèmes différentiels à conditions limites en deux points. Elles donnent notamment naissance à deux types de méthodes qu'il est loisible d'adapter, selon les procédés les plus divers, à chaque problème particulier : les méthodes d'itération sur des variables et les mé-

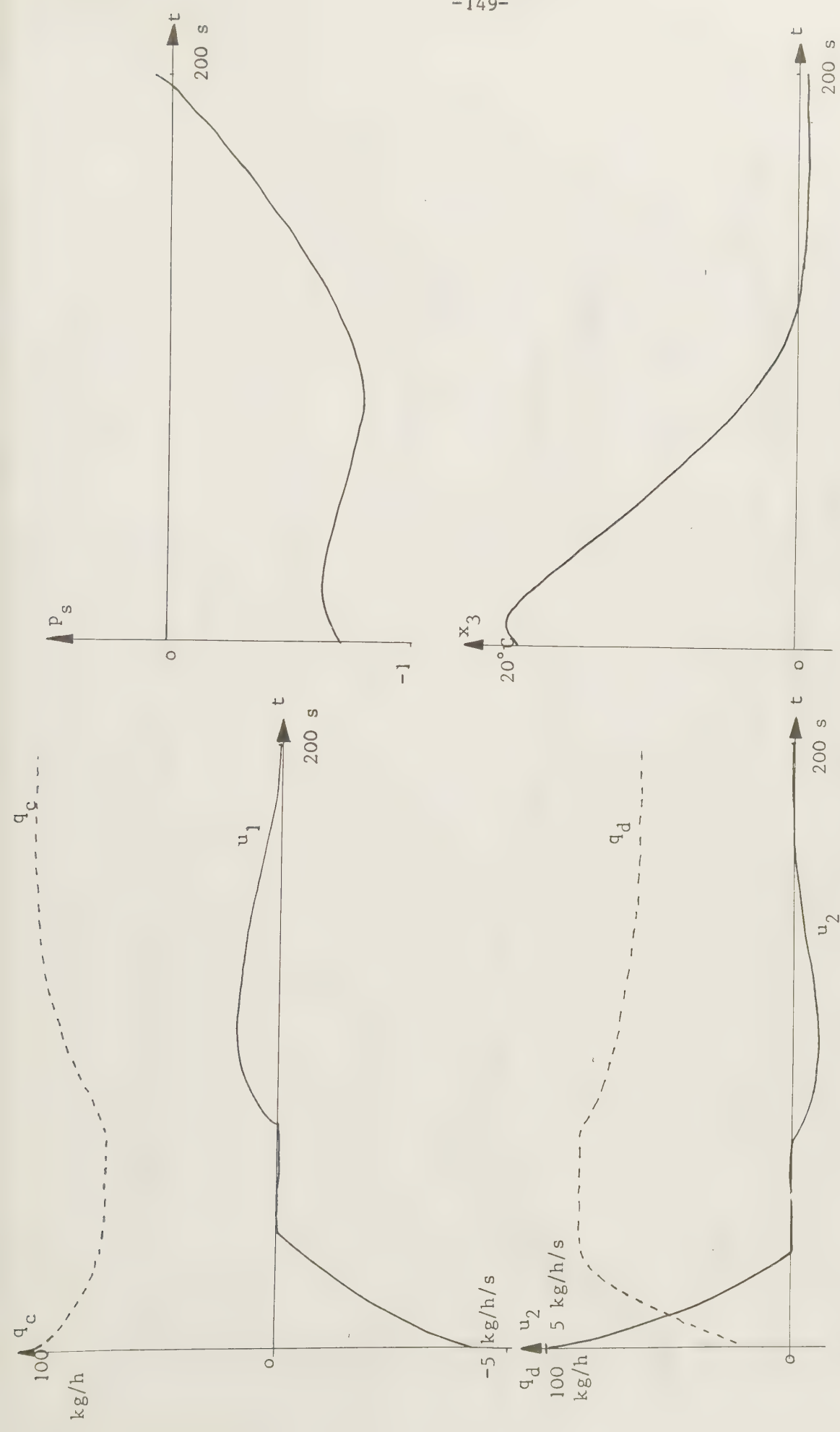


Fig. (3) - "Trajectoires optimales type" avec butées sur les débits de combustible et de désurchauffe

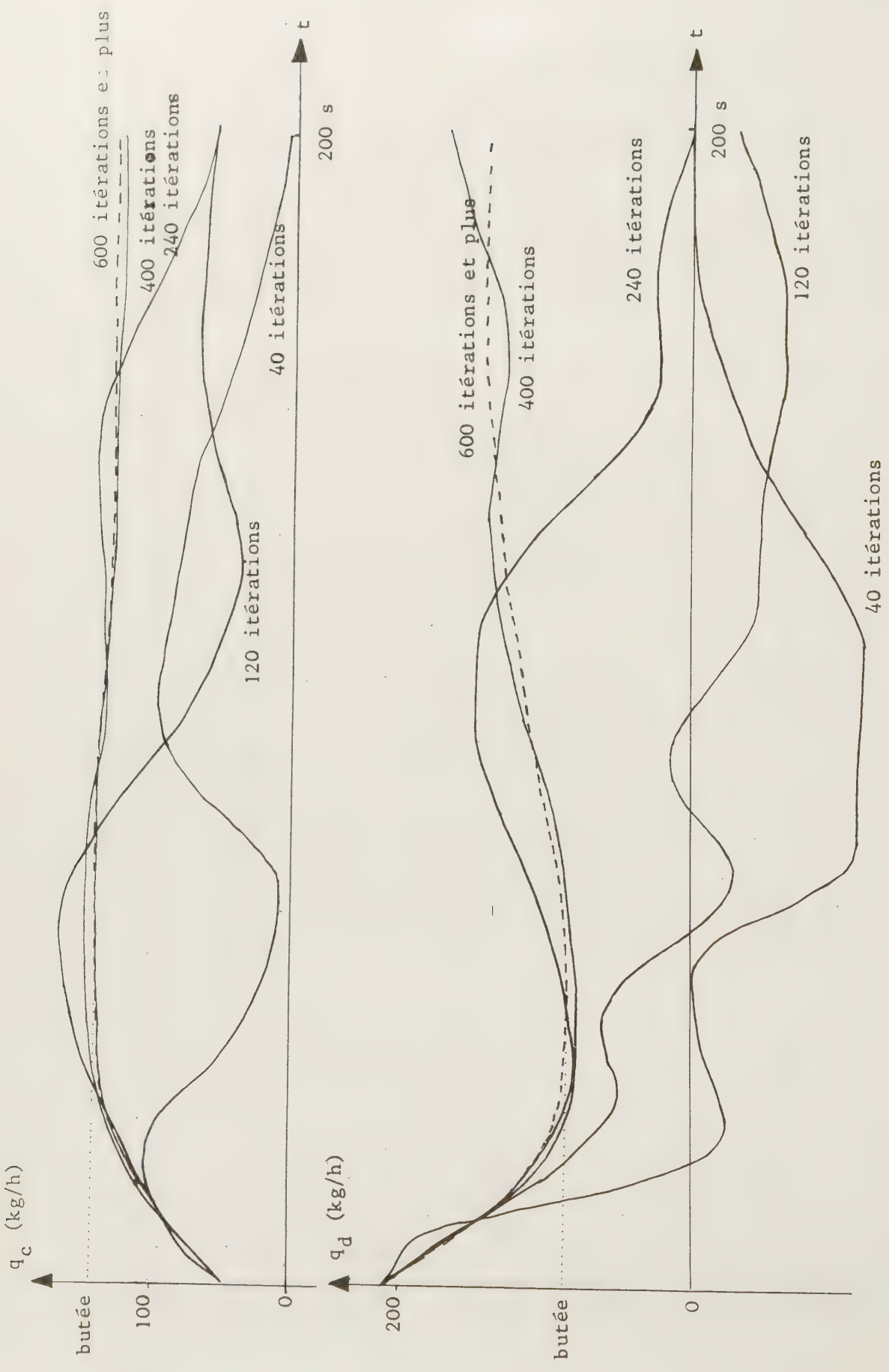


Fig.(4) - Convergence de la méthode des dérivées partielles en présence de butées.
Les initialisations sont $q_c = \text{cte}$ et $q_d = \text{cte}$

thodes d'itération sur des trajectoires.

Les algorithmes des deux genres ont été ici aménagés pour résoudre les problèmes à valeurs limites en plusieurs points issus de l'optimalisation avec contraintes ou butées sur le vecteur d'état. La méthode des matrices de sensibilité présente l'avantage de converger rapidement et de fournir la seule information nécessaire à la commande en ligne : le vecteur de commande à l'instant courant. Malheureusement, il est pratiquement nécessaire de connaître a priori la forme des trajectoires optimales et d'adapter l'algorithme en conséquence. De plus, la méthode nécessite l'intégration d'un système différentiel très sensible à ses conditions initiales.

Pour pallier cet inconvénient majeur on peut intégrer les systèmes différentiels dans le sens où ils sont stables, et itérer sur les trajectoires. Pour améliorer la convergence, il est nécessaire d'adjoindre un terme de contrôle de l'évolution des trajectoires entre deux itérations. Ceci équivaut en hybride à la résolution d'un système aux dérivées partielles à deux variables. Cette méthode générale qui ne fait appel à aucune hypothèse a priori sur la forme des trajectoires a été appliquée en simulation sur 690 à un problème à deux commandes et quatre états dont deux contraints. La vitesse de résolution est évidemment sans commune mesure avec celle que l'on obtiendrait de la seule technologie numérique d'un ordinateur de prix identique. Elle permet d'envisager, à moyen terme, une commande en ligne qui pourrait constituer l'un des chevaux de bataille de la prochaine génération de calculateur hybride, où l'intégration d'un bloc analogique à câblage automatique dans un ensemble digital ouvrira l'ère de programmes hybrides généraux ayant perdu le caractère artisanal infligé par "la patte du spécialiste."

Il reste évidemment que les besoins devraient justifier les moyens. Sans risque, on peut affirmer que ce ne sera pas toujours le cas et qu'il y a donc place pour des techniques sous-optimales employant les résultats optimaux obtenus hors ligne, par exemple, par les méthodes développées ici : ce sera l'objet de la troisième partie.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- Y. THOMAS H. APTER B. CHENEVEAUX
"Etude d'une régulation optimale de chaudière" Rapport final DGRST -
contrat n° 66.00.096 - ENSM - 1968.

- 2- A. ABDALLAH
Rapport interne - ENSM - juin 1970.

- 3- J. L. STARR
"Computation of optimal control : solution of the multipoint boundary
value problem" Report 68-15 june 1968 - U.C.L.A.

- 4- A. E. BRYSON Y. C. HO
"Applied optimal control" Blaisdell 1969 - chapter 7.

- 5- Ph. de LARMINAT Y. THOMAS
"Etude d'une régulation optimale" Rapport final DGRST - contrat
n° 68.01.409 Annexe VI (A. STEVEN F. PAULUS). ENSM juin 1970.

TROISIEME PARTIE

REGULATIONS DYNAMIQUES FONCTIONNELLES SOUS-OPTIMALES

Il n'est sans doute pas inutile de rappeler les différentes étapes qui nous ont menés jusqu'à cette notion de régulations sous-optimales.

Dans la première partie de ce mémoire nous avons d'abord montré l'intérêt d'employer l'optimisation quadratique dans les problèmes de régulation des systèmes linéaires non contraints. Notamment, à la structure en boucle fermée, et par tendances, s'ajoute la possibilité de prendre en compte sous forme stochastique aussi bien les prédictions des perturbations que les imprécisions du modèle du processus à réguler.

Avec la seconde partie, ont été abordés les systèmes non linéaires contraints.

Les principes d' "invariant imbedding" ont d'abord permis d'établir - pour le cas particulier d'un système linéaire à saturation de commande et muni d'un critère quadratique - un algorithme de calcul d'un ensemble de

trajectoires optimales, en tous points comparable aux catalogues de réponses indicielles que l'on rencontre quelquefois en régulation classique.

Le traitement, par les méthodes variationnelles, de l'optimisation des systèmes à état contraint, a ensuite engendré des problèmes à valeurs limites en plusieurs points. Si leur résolution par des techniques hybrides permet du point de vue du temps de calcul d'envisager à plus ou moins long terme des commandes en ligne, il n'en reste pas moins que la structure actuelle des calculateurs hybrides n'autorise que difficilement l'emploi, dès maintenant, de tels algorithmes dans la mesure où les besoins ne justifient que rarement les moyens.

Il est donc nécessaire, pour le présent, de rechercher des structures de commande sous-optimales d'une simplicité qui en justifie l'emploi.

C'est l'objet de cette troisième partie où, après quelques considérations sur la sous-optimalité (Chapitre I), on étudie et met au point une régulation sous-optimale utilisant des algorithmes réputés appartenir au domaine de l'apprentissage.

Chapitre I

CONSIDERATIONS SUR LA SOUS-OPTIMALITE

La structure fondamentale de commande étant la boucle fermée, il est habituel de voir les automaticiens attirés par les théories de "synthèse". C'est l'une des raisons de la vogue grandissante de l'optimisation quadratique qui fit l'objet de notre première partie. C'est aussi l'un des attraits de la programmation dynamique qui constitue sans doute la plus puissante théorie de la commande, mais dont malheureusement l'utilisation "en ligne" nécessiterait de puiser à tout instant le vecteur de commande dans un tableau multidimensionnel impossible à mémoriser pour des processus réalistes.

De leur côté, les méthodes variationnelles, appliquées à la commande des systèmes contraints, ne jouissent pas de cette propriété de synthèse. On a vu qu'il est possible de pallier cette insuffisance en recalculant périodiquement la solution du problème à valeurs limites en plusieurs points. A défaut d'une commande en boucle fermée continue, on peut donc réaliser une correction par bouclage périodique, mais seulement au prix de l'emploi d'algorithmes complexes et de matériel de technologie avancée, qu'il serait, du moins présentement, pourtant souhaitable d'éviter, tant pour des raisons techniques qu'économiques.

Dans ces conditions, n'est-il pas préférable de développer des commandes sous-optimales possédant, à la fois le caractère de chaîne fermée et celui de simplicité de réalisation ? Ne peut-on parvenir, notamment, à réaliser le tableau multidimensionnel (mentionné ci-dessus) de la programmation dynamique sous forme de "générateurs de fonction" et ce à partir de quelques résultats optimaux, calculables hors ligne par application des méthodes variationnelles.

Cette question méritait qu'un chapitre y fût consacré.

Après avoir précisé ce que nous entendons par sous-optimalité, nous étudierons comment parvenir à celle-ci, ce qui nous conduira à développer une méthode dite "par algorithme d'apprentissage" qui fera l'objet du chapitre suivant.

1 - SOUS-OPTIMALITE -

Nous tenterons d'abord d'établir une définition de la sous-optimalité, puis nous nous référerons à l'exemple du générateur de vapeur afin de rappeler que deux types de commande sont nécessaires, qui font apparaître deux genres de politiques sous-optimales. Il sera alors naturel de procéder à une classification plus complète de ces dernières techniques.

1-1 Définition

Il paraît évident qu'une commande sous-optimale mérite d'être employée si sa structure simplifiée engendre une valeur du critère de performance voisine du minimum absolu de ce critère, qu'il devra d'ailleurs être possible d'approcher aussi près qu'on le désire en compliquant la structure de la commande.

En fait, et nous avons largement développé cette idée dans la première partie, le critère d'optimisation est principalement, en matière de régulation et pour le moment du moins, un moyen synthétique d'obtenir les performances statiques et dynamiques souhaitées. Il n'y a donc pas lieu de porter un intérêt primordial à la valeur du critère.

Par contre, le premier désir de l'utilisateur est de parvenir, en fonctionnement sur processus réel, à des trajectoires de sortie à peu près identiques à celles tracées en simulation et susceptibles ainsi d'une bonne prédiction. Comme l'écart entre les sorties optimales du modèle et les sorties sous-optimales du processus n'est mesurable qu'a posteriori, il ne pourra pas être utilisé pour établir l'algorithme simple de sous-optimalité cherché mais seulement comme facteur de qualité de cette sous-optimalité.

Si l'on suppose qu'une identification assez précise a été réalisée, il est facile d'admettre que ce facteur de qualité sera bon si pour tout t et tout état $\underline{x}(t)$ l'écart entre les vecteurs de commande optimale et sous-optimale est faible.

Ces notions seront formulées mathématiquement plus loin.

En outre, il est, bien entendu, nécessaire que les contraintes égalités et inégalités soient vérifiées par la technique sous-optimale.

1-2 Exemple

Considérons à nouveau le générateur de vapeur pilote et les perturbations qu'il doit subir, par analogie avec la puissance demandée à

une centrale de réglage. On pourra ici se référer au chapitre III de la première partie ainsi qu'à l'annexe.

Notamment la figure 2 de l'annexe indique deux types de périodes pendant lesquelles des butées ou des contraintes sont susceptibles d'être atteintes : d'une part lors du fonctionnement en télé-réglage près du maximum technique, d'autre part lors des rampes de montée ou de baisse de charge.

Dans les deux cas, la régulation optimale, telle que conçue ici, impliquerait, lorsque les butées sont atteintes, de résoudre un système différentiel à valeurs limites en plusieurs points. Ceci devrait donc être effectué en ligne mais peut aussi, réalisé hors ligne, servir de base à une politique sous-optimale.

Les rampes de puissance suggèrent immédiatement une solution. En effet, ces rampes, qui peuvent se produire plusieurs fois dans la journée, ont des caractéristiques communes : d'une part leurs pentes sont à peu près constantes, d'autre part les conditions initiales de l'optimisation (c'est-à-dire les valeurs des pressions, températures, débits qui précèdent la montée ou la baisse de puissance) restent voisines d'un jour à l'autre. Il est donc envisageable de déterminer hors ligne une trajectoire de commande optimale correspondant à une pente moyenne et à des conditions initiales moyennes. De plus, une correction basée sur les écarts de pente et de conditions initiales permettra de s'approcher de l'optimum quelles que soient les conditions de fonctionnement. Cette méthode est assimilable au classique problème du guidage développé analytiquement pour des besoins aérospatiaux.

Le fonctionnement en télé-réglage se présente quelque peu différemment et il semble difficile de définir une trajectoire optimale nominale. En effet, si certains états, tels la température et la pression, sont assurés de se trouver à l'intérieur d'une fourchette de faible amplitude (5 à 10° C. pour la température par exemple), il n'en va pas de même des débits de fuel et d'eau de désurchauffe qui évoluent dans une large plage de variation. Il serait donc ici plus indiqué de réaliser une commande en boucle fermée sur les grandeurs mesurées, ayant la forme d'une fonction algébrique établie par régression à partir d'un échantillon de valeurs optimales exactes.

1-3 Classification des méthodes sous-optimales

Sur l'exemple du générateur de vapeur nous venons d'évoquer deux façons d'envisager la commande sous-optimale.

En fait, un troisième procédé avait été utilisé précédemment,

lors de l'identification, quand on s'était imposé un modèle linéaire de dimensions réduites afin d'employer aisément la théorie de l'optimisation quadratique.

Bien qu'en abordant un domaine tel que celui de la sous-optimalité, on puisse s'attendre à ce que l'imagination engendre autant de solutions qu'il y a de problèmes à résoudre, il nous paraît en définitive suffisant, à la lumière de cet exemple, de classer les méthodes sous-optimales en trois catégories :

- la simplification du modèle d'état
- l'utilisation d'une trajectoire nominale (problème du guidage)
- l'approximation par des fonctions.

La première ayant été discutée dans la première partie et appartenant d'autre part plutôt au domaine de l'identification, nous consacrerons la fin de ce chapitre à quelques considérations sur les deux autres types de méthodes.

2 - UTILISATION D'UNE TRAJECTOIRE NOMINALE - PROBLEME DU GUIDAGE -

Rappelons d'abord la formulation et la solution du classique problème de guidage sans contraintes.

Soit le système d'équations $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$ (1)

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (2)$$

et le critère à minimaliser $J = \int_{t_0}^{t_0+T} f_0(\underline{x}, \underline{u}, t) dt$ (3)

T fixé.

A une condition initiale fixée $\underline{x}_0$ correspond la trajectoire optimale $\underline{x}_0^*(t)$ ($t \in [t_0, t_0 + T]$) due à la commande optimale $\underline{u}_0^*(t)$.

Le problème du guidage est le suivant :

- si le problème démarre non pas en $\underline{x}_0$ mais en un point voisin $\underline{x}_0 + \delta \underline{x}$,
- ou bien, si à la suite de perturbations non prévues à l'avance ou en conséquence d'imprécisions dans les équations (1) du modèle, le vecteur d'état vient à s'écarter d'une faible grandeur $\delta \underline{x}(t)$ de la trajectoire optimale $\underline{x}_0^*(t)$,

quelle correction $\delta \underline{u}^*(t)$ faut-il apporter à la commande nominale $\underline{u}_0^*(t)$, afin que la commande $\underline{u}_0^*(t) + \delta \underline{u}^*(t)$ soit optimale vis-à-vis des nouvelles conditions de départ $\underline{x}_0^*(t) + \delta \underline{x}(t)$?

Autrement dit, cette correction $\delta \underline{u}(t)$ doit être telle qu'elle minimise $J(\underline{u}_0^*(t) + \delta \underline{u}(t))$. Il revient au même de calculer $\delta \underline{u}(t)$ en se référant à $\underline{u}_0^*(t)$ et donc en minimisant :

$$(4) \quad \Delta J = J[\underline{x}_0^*(t) + \delta \underline{x}(t), \underline{u}_0^*(t) + \delta \underline{u}(t)] - J(\underline{x}_0^*(t), \underline{u}_0^*(t))$$

On est ainsi ramené à la détermination de la variation du critère J qu'il sera ici nécessaire de pousser au second ordre puisque $\underline{x}_0^*(t)$ et $\underline{u}_0^*(t)$ annulent la première variation.

Ce calcul s'inspire directement des principes variationnels développés au chapitre III (deuxième partie) :

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_0+T} [H(\underline{x}_0^* + \delta \underline{x}, \underline{u}_0^* + \delta \underline{u}) - \underline{\lambda}^T (\dot{\underline{x}}_0^* + \delta \dot{\underline{x}})] dt - \int_{t_0}^{t_0+T} [H(\underline{x}_0^*, \underline{u}_0^*) - \underline{\lambda}^T \dot{\underline{x}}_0^*] dt \quad (5)$$

$$\text{où } \delta \dot{\underline{x}} = F_x \delta \underline{x} + F_u \delta \underline{u} \quad (6) \quad F_x = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

soit après développement au second ordre

$$\Delta J = -\underline{\lambda}^T \delta \underline{x} \Big|_{t_0+T} + \int_{t_0}^{t_0+T} \left\{ (H_x^T + \dot{\underline{\lambda}}) \delta \underline{x} + H_u^T \delta \underline{u} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta \underline{x} \\ \delta \underline{u} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{x} \\ \delta \underline{u} \end{bmatrix} \right\} dt \quad (7)$$

Comme $\underline{u}_0^*(t)$ et $\underline{x}_0^*(t)$ sont tels que

$$\dot{\underline{\lambda}} = -H_x \quad (8)$$

$$\underline{\lambda}(t_0 + T) = 0 \quad (9)$$

$$\text{et } H_u = 0 \quad (10)$$

$\delta \underline{u}^*(t)$ doit donc minimiser

$$\Delta J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \left\{ \begin{bmatrix} \delta \underline{x} \\ \delta \underline{u} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xu} \\ H_{ux} & H_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \underline{x} \\ \delta \underline{u} \end{bmatrix} \right\} dt \quad (11)$$

compte tenu de (6).

On est en présence d'une optimisation quadratique, pour laquelle une démonstration comparable à celle donnée au chapitre II de la première partie, fournit

$$\delta \underline{u}^*(t) = - H_{uu}^{-1} (H_{ux} + F_u^T S) \delta \underline{x} \quad (12)$$

où S est solution d'un système différentiel de RICCATI.

Il est bien évident que, dans la mesure où le vecteur $\delta \underline{x}$ n'est pratiquement que rarement un infiniment petit, l'emploi de la correction (12) confère à la commande $\underline{u}_0^*(t) + \delta \underline{u}^*(t)$ le caractère de sous-optimalité.

Si maintenant le système (1) (2) (3) est de plus soumis à des contraintes inégalités, le système linéaire (6) muni du critère quadratique (11) est lui-même régi par des contraintes, et une expression analytique telle que (12) n'est plus valable, du fait notamment que les instants d'entrée et de sortie de contraintes sont fonctions de $\delta \underline{x}$.

Rigoureusement, cette méthode nécessite, pour déterminer $\delta \underline{u}$, la résolution d'un problème à valeurs limites en plusieurs points, et aucune simplification sensible n'est ainsi apportée à la solution du problème initial.

Dans le cas peu réaliste où $\delta \underline{x}$ est faible, il est sans doute possible, en tenant compte de la connaissance des instants d'entrée et de sortie de contrainte de la trajectoire nominale, de "satisfaire" de manière acceptable les contraintes par utilisation d'une formule telle que (12).

Pour un $\delta \underline{x}$ plus réaliste, On serait plutôt tenté d'établir la relation telle que (12) par régression à partir de quelques trajectoires optimales "voisines" de la commande optimale nominale et calculées hors ligne par des algorithmes tels que ceux développés au précédent chapitre.

La notion plus générale d'approximation par régression est abordée maintenant.

3 - APPROXIMATION DE LA COMMANDE OPTIMALE PAR DES FONCTIONS -

Soit $\underline{p}$ un vecteur, dit "vecteur paramètre", constitué des mesures effectuées sur le processus, des coefficients variables du modèle, des contraintes variables et des coefficients du critère de performance. Pour un système observable, $\underline{p}$ caractérise ainsi totalement un problème d'op-

timalisation.

A chaque grandeur $\underline{p}_i$ correspond une valeur optimale $\underline{u}_i^* (\underline{p}_i)$ constituant une commande en boucle fermée puisque les mesures apparaissent dans $\underline{p}_i$.

Soit maintenant une fonction explicite de $\underline{p}$ et de coefficients ajustables $\underline{k}$: $\underline{u}_A (\underline{p}, \underline{k})$.

L'échantillon $\{\underline{u}_i^* (\underline{p}_i)\}$ ($i = 1, \dots, m$) sera dit approximé par $\underline{u}_A (\underline{p}, \underline{k})$ si on a pu déterminer $\underline{k}$ tel que $\sum_{i=1}^m (\|\underline{u}_A (\underline{p}_i, \underline{k}) - \underline{u}_i^* (\underline{p}_i)\|)$ soit minimum.

Avant de donner quelques précisions sur le choix de l'échantillon $\{\underline{p}_i\}$ et sur celui de la structure de $\underline{u}_A$, il est bon d'indiquer que le principe de cette méthode suppose des trajectoires de commande ($\underline{u}^* (t)$) assez régulières. Si notamment la commande est du type "tout ou rien", il est préférable de chercher une approximation de la surface de commutation. Dans le même esprit, en présence de commande à dérivée discontinue, des auteurs ont procédé à la régression du minimum du critère de performance ou encore à celle du vecteur adjoint $\underline{\lambda} (t)$.

3-1 Choix de l'échantillon

L'échantillon doit en priorité être "représentatif" du fonctionnement du système bouclé. Ainsi sachant que l'évolution du processus se fait toujours au voisinage d'une trajectoire nominale, on se contentera d'un ensemble de référence $\{\underline{p}_i\}$ situé dans ce voisinage.

Cette représentativité doit permettre la "généralisation", c'est-à-dire que tout $\underline{u}^* (\underline{p}_j)$ susceptible de se produire et situé dans une zone non représentée dans l'échantillon doit être correctement approché par $\underline{u}_A (\underline{p}_j)$. C'est pourquoi, on utilise quelquefois un échantillon uniformément distribué.

En fait également, toute connaissance a priori sur la fréquence de survenance de tel ou tel $\underline{p}_i$ est prise en compte par l'utilisateur lors du choix de l'échantillon.

Le calcul des $\underline{u}_i^* (\underline{p}_i)$ est différemment efficace selon que l'instant t_0 est fixé ou tient lieu d'instant courant (t). En effet, si $t_0 = t$, la résolution d'un problème à valeurs limites en plusieurs points ne fournit qu'une seule valeur $\underline{u}^* (\underline{p}_i)$. Par contre, si t_0 est fixé, chaque tra-

jectoire calculée donne un grand nombre (théoriquement une infinité) de $\underline{u}_i^* (\underline{p}_i)$.

On pourrait penser que dans la mesure où les conditions initiales de chaque problème d'optimisation considéré ($\underline{p}_i$) ne sont pas imposées avec précision, la résolution d'un problème à valeurs limites en plusieurs points ne s'avère pas nécessaire et qu'une intégration à rebours, par exemple, est suffisante. En fait, il n'en est rien car les équations intégrées ont une telle sensibilité qu'il est impossible de prévoir les conditions de départ des trajectoires susceptibles d'amener celles-ci dans une zone souhaitée.

3-2 Choix de la structure de $\underline{u}_A (\underline{p}, \underline{k})$

La première méthode qui vient à l'esprit lorsqu'on traite de régression est celle des moindres carrés.

Pour cela, $\underline{u}_A$ est choisi linéaire en $\underline{k}$

$$\underline{u}_A (\underline{p}, \underline{k}) = \underline{k}^T \underline{N} (\underline{p})$$

où le vecteur $\underline{N} (\underline{p})$ peut éventuellement être constitué de polynômes orthogonaux.

La structure de $\underline{N} (\underline{p})$ est déterminée à l'aide d'informations tirées soit d'un calcul analytique, soit de l'observation d'un "catalogue" de trajectoires optimales. Dans cet ordre d'idées, il peut être préférable de prendre directement pour $\underline{u}_A$ une fonction non linéaire.

Afin de concrétiser ces quelques notions et les précédentes, nous avons cru bon d'insérer un exemple élémentaire (-1- -2-).

Soit l'équation $\dot{x} = u$ où $|u(t)| \leq B = \text{cte}$

et le critère de performance

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[(x(t) - z(t))^2 + \alpha^2 u^2 \right] dt +$$

$$\frac{1}{2} h [x(t_0 + T) - z(t_0 + T)]^2$$

T est fixé.

$z(t)$ est un échelon qui se produit à un instant $t_p \in [t_0, t_0+T]$:

$$z(t) = z_0 + \Delta z \Gamma(t - t_p)$$

Pour satisfaire le plus grand nombre d'utilisateurs, on recherche une fonction explicite :

$$u_A(\underline{p}) = u_A(T - t, x(t), B, \alpha, t_p, \Delta z, h)$$

de la forme

$$u_A = \frac{\lambda_{sc}}{\alpha^2} (1 + y) \text{ où } \lambda_{sc} \text{ correspond à la variable adjointe, calculable à la main, en l'absence de la contrainte B.}$$

Dans un premier temps y a été choisi tel que

$$y = k_0 + \sum_{i=1}^8 k_i n_i(\underline{p})$$

où les n_i sont des polynomes en $\underline{p}$.

L'utilisation de l'algorithme de "moindres carrés" IBM (REGRE) s'étant avérée assez lente, une autre structure de y, permettant l'emploi d'une méthode efficace de programmation non linéaire (celle de NEWTON), a été envisagée :

$$y = k_0 + \sum_{i=1}^8 k_i d_i$$

où d_i représente un élément ou une combinaison d'éléments du vecteur $\underline{p}$.

Dans les deux cas, l'échantillon employé était composé de 700 valeurs de $u^*(\underline{p})$. Pour l'algorithme REGRE, une erreur moyenne de 4,5 % et un écart type de 8 % ont été obtenus tandis qu'après 5 à 6 itérations la méthode de NEWTON a permis d'atteindre une erreur moyenne de 1 % et un écart type de 3 %.

Les expressions de u_A sont, dans les deux cas, calculables en ligne sur une machine telle que la 1130 en moins de 0,1 seconde.

L'amélioration de la précision est évidemment liée à l'importance de l'échantillon et à la structure de y. C'est d'ailleurs en quelque sorte un inconvénient de la méthode d'être toujours en mesure d'augmenter sa précision puisqu'aucune contrainte ne régit la structure de u_A . Pour qu'une telle méthode de régression devienne applicable, il est nécessaire de limiter au minimum l'intervention imaginative de l'utilisateur.

Il serait donc préférable, par souci de simplicité de mise en oeuvre, de fixer la structure de u_A de la manière la plus élémentaire possible et d'étudier, dans ces conditions, la qualité et la précision des résultats obtenus.

En se reportant une fois de plus à l'exemple du générateur de vapeur, il est bon de se rappeler que les grandeurs considérées comme commande dans le critère de performance sont des dérivées de débit ($\dot{q}$). En conséquence,

un opérateur humain qui devrait piloter ce processus apprécierait de n'avoir à sa disposition, pour chaque commande, que deux boutons poussoirs + et -, permettant de faire $\dot{q} = 1$ $\dot{q} = -1$ et $\dot{q} = 0$.

Cette idée nous a amené à adapter à notre problème de contraintes sur l'état une commande sous-optimale développée par MENDEL et ZAPALAC -6- pour les problèmes en temps minimal et où donc pour une commande par tout ou rien la caractérisation de u_A est $u_A = \text{signe } \underline{k}^T \underline{P}$.

$\underline{P}$ étant le vecteur $\underline{p}$ quantifié en binaire et $\underline{k}$ étant un vecteur pondérateur à valeurs continues.

L'application de cette caractérisation à la commande optimale qui constitue l'aboutissement des considérations de ce chapitre fera l'objet du chapitre suivant.

4 - CONCLUSION -

Dans un esprit de simplification de réalisation d'une commande optimale d'un système dynamique muni de contraintes, on a pu distinguer trois stratégies sous-optimales caractéristiques comportant :

- soit une simplification du modèle d'état
- soit l'utilisation d'une trajectoire nominale
- soit une approximation par des fonctions explicites.

Cependant, on peut dire que toute commande "en ligne" est établie sur un modèle simplifié et donc que la première stratégie s'avère d'un emploi général.

L'utilisation d'une trajectoire nominale fait l'objet, en l'absence de contraintes, du classique problème du guidage, mais nécessite en présence de contraintes des développements analytiques complexes qu'il est judicieux d'éviter en déterminant empiriquement par régression une correction de la trajectoire nominale.

Cette seconde caractéristique déborde donc sur la troisième qui concerne l'approximation du vecteur de commande $\underline{u}^*$ par une fonction des grandeurs mesurées ($\underline{y}_A$) dont les coefficients sont ajustés par une méthode de régression à partir de la connaissance d'un échantillon de commandes optimales exactes, elles-mêmes calculées hors ligne par les méthodes développées dans la seconde partie.

Par une structure appropriée de $\underline{u}_A$ et un choix judicieux de l'échantillon de référence, il est possible de parvenir à la précision souhaitée. Cependant, cette part trop grande laissée à l'imagination engendre des études onéreuses et une mise en oeuvre spécifique du problème considéré.

Il nous est donc apparu souhaitable d'examiner les performances obtenues par une méthode de régression où la structure de $\underline{u}_A$ a été délibérément choisie la plus simple possible : c'est l'objet du chapitre suivant.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

-1- R. TRIBES

Rapport interne ENSM - 1968.

-2- J. C. MARC

"Commande optimale avec butée" DEA - ENSM - Faculté des Sciences Nantes - juin 1969.

-3- A. G. LONGMUIR E. V. BOHN

"The synthesis of suboptimal feedback control laws " IEEE transactions on automatic control - december 1967 pp. 755-758.

-4- F. W. SMITH

"A trainable non linear fonction generator" IEEE transactions - vol. AC 11 n° 2 april 1966.

-5- Y. THOMAS

"Régulation optimale industrielle" Annales ENSM - 2ème semestre 1969.

-6- J. M. MENDEL J. J. ZAPALAC

"Self organizing control systems" Vol. 1-2-3 - Douglas aircraft company reports - California 1965-1966.

Chapitre II

UNE REGULATION SOUS-OPTIMALE PAR ALGORITHME D'APPRENTISSAGE

Les considérations précédentes sur la régulation dynamique fonctionnelle sous-optimale nous amènent à établir une commande sous-optimale ayant la forme d'une fonction (u_A) des grandeurs mesurées sur le processus et des paramètres de régulation, ajustés hors-ligne à partir de la connaissance d'un échantillon de commandes optimales exactes.

Nous nous proposons ici de montrer qu'en choisissant pour u_A une structure très simple et donc une mise en oeuvre peu onéreuse, il est néanmoins possible de parvenir à une précision acceptable.

En nous référant à la commande du générateur de vapeur d'une part, et au critère de performance quadratique utilisé dans la première partie de ce rapport d'autre part, nous sommes précédemment arrivés à la conclusion que des commandes prenant trois valeurs $+1$, -1 et 0 présentent, en dépit de leur simplicité, les caractéristiques qu'apprécie l'opérateur humain.

De plus, comme les grandeurs mesurées sur le processus à réguler sont toujours fournies avec une imprécision notable, il paraît, dans un certain nombre de cas, suffisant de connaître la zone où se trouvent les mesures au lieu de leurs valeurs exactes.

En définitive, la commande u_A , recherchée ici, prendra l'une des trois valeurs $+1$, -1 ou 0 , selon le signe de quantités de la forme $\underline{k}^T \underline{P}$ où $\underline{P}$ représente le vecteur de mesures (adjointes à d'éventuels paramètres d'optimisation - cf. chapitre I) quantifié dans un code binaire.

Cette manière de voir est aussi celle de certains spécialistes de reconnaissance de formes auxquels nous empruntons la théorie et les algorithmes associés (paragraphes 1 et 2) pour les adapter à ce problème de commande.

L'application à la commande sous-optimale d'un système contraint simulé et à celle du générateur de vapeur fait l'objet du troisième paragraphe.

I - RECONNAISSANCE DE FORME ET SYSTEMES A APPRENTISSAGE -

Voici, tout d'abord, un bref aperçu des théories développées par WIDROW -1- et SMITH -2-.

Considérons le problème suivant : soit à classer des éléments $\underline{x}$ d'un ensemble en deux catégories. Formellement, c'est dire qu'il existe une fonction h telle que :

$$h(\underline{x}) > 0 \quad \text{si } \underline{x} \text{ appartient à la catégorie 1} \quad (1)$$

$$h(\underline{x}) < 0 \quad \text{si } \underline{x} \text{ appartient à la catégorie 2} \quad (2)$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad \text{étant un élément de l'ensemble (pour un système de commande,}$$

$\underline{x}$ sera le vecteur noté $\underline{p}$ ci-dessus, et les catégories correspondront par exemple à $u = \pm 1$).

Une interprétation géométrique de ce problème est que cette classification divise l'espace à N dimensions de coordonnées $x_1 \dots x_N$ en deux sous-espaces, l'un contenant les éléments $\underline{x}$ de la catégorie 1, l'autre contenant les éléments de la catégorie 2. $h(\underline{x}) = 0$ est l'hypersurface de séparation.

Résoudre ce problème consiste à réaliser un générateur de fonction tel qu'à partir d'un nombre minimum d'éléments $\underline{x}$, sa structure interne lui permette de classer correctement l'ensemble des éléments susceptibles d'être rencontrés, ou du moins le plus grand nombre possible de ces éléments. Autrement dit, le générateur de fonction doit "apprendre" à "reconnaitre" l'hypersurface $h(\underline{x}) = 0$.

L'élément de base de ce générateur de fonction est constitué d'un élément linéaire à seuil, piloté par le vecteur $\underline{x}$ codé binaire (soit $\underline{X}$).

1-1 Description de l'élément linéaire à seuil : (figure 1)

Chaque composante x_i du vecteur $\underline{x}$ à classer est d'abord quantifiée : soit $\underline{X}_i$ le vecteur binaire correspondant, et $\underline{X}$ le vecteur de composantes $\underline{X}_i$.

La fonction $\hat{h}(\underline{X})$ définie par $\hat{h}(\underline{X}) = \underline{k}^T \underline{X}$ (3) est alors calculée .

Le vecteur $\underline{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_N \end{bmatrix}$, où $\dim \underline{k}_i = \dim \underline{X}_i$, est un vecteur de pondération ajusté par comparaison du nombre $u^*(\underline{x})$ indiquant la catégorie de $\underline{x}$ (u^* prend donc ici les valeurs $+1$ ou -1) et de la grandeur u : $u = \text{signe } \hat{h}(\underline{X})$.

Cette adaptation des "poids" $\underline{k}$ est effectuée au moyen d'algorithme

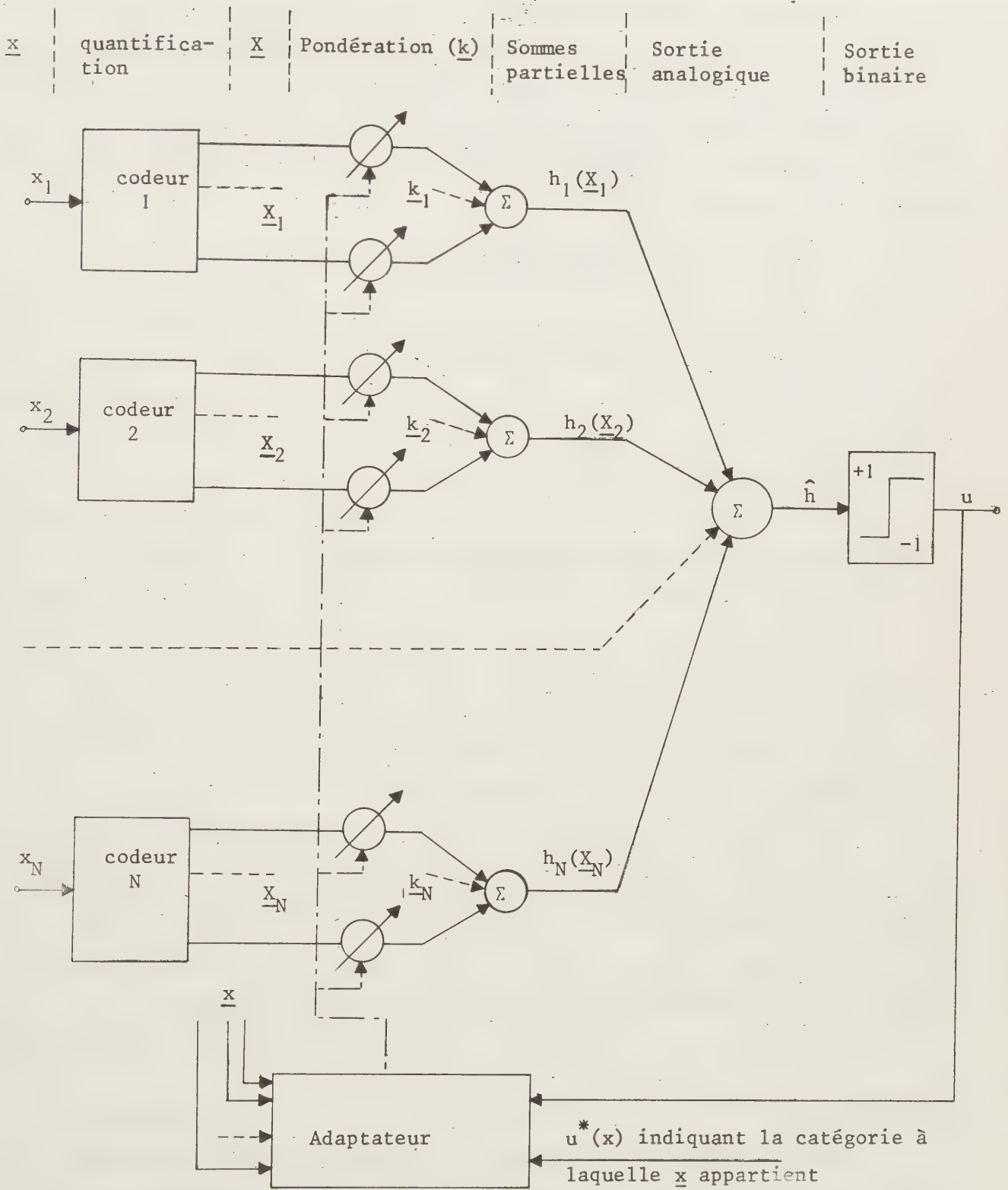


Fig. (1)

d'apprentissage que nous exposerons plus loin.

1-2 Codage des variables d'entrée : (-2-)

Soit, par exemple, une grandeur x_i (fig. 2). Le codage de cette grandeur consiste à quantifier le domaine plausible de variation de x_i en un certain nombre de zones et à représenter chacune de ces zones par un nombre binaire. La longueur de ce nombre binaire sera au plus égale au nombre de zones définies par la quantification de x_i .

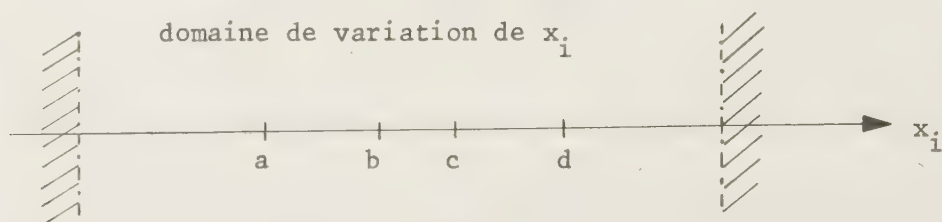


Fig. (2)

Ce code pourra avoir la structure suivante :

$x_i \leq a$	(1	0	0	0	0)
$a < x_i \leq b$	(0	1	0	0	0)
$b < x_i \leq c$	(0	0	1	0	0)
$c < x_i \leq d$	(0	0	0	1	0)
$d < x_i$	(0	0	0	0	1)

Le vecteur $\underline{x}$ voit donc chacune de ses composantes x_i représentée par un nombre binaire X_i , défini suivant un certain code. La longueur de ce nombre ne dépend que de la quantification choisie à priori, par exemple, x_1 sera quantifié en cinq zones, x_2 en six zones, x_3 en 4 zones, x_N en 3 zones. Chaque vecteur $\underline{x}$ sera donc représenté par un nombre binaire $\underline{X}$ de la forme :

$$\underline{X}^T = \left\{ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \mid \text{-----} \mid 0 \ 1 \ 0 \ 0 \mid \text{-----} \mid 1 \ 0 \ 0 \right\}$$

- Choix du code -

Parmi l'ensemble des vecteurs $\underline{x}$ possibles, soit Q et R le nombre d'éléments plausibles, codés, appartenant respectivement à la catégorie 1 ($u^* = +1$) et à la catégorie 2 ($u^* = -1$) et soient q et r tels que :

$$\begin{aligned} q &< Q \\ r &< R \end{aligned}$$

Les q éléments de la catégorie 1 et les r éléments de la catégorie 2 représentent des échantillons de l'ensemble de ces éléments Q et R .

Soit M^+ la matrice qui a pour lignes les q échantillons codés de la catégorie 1, M^- la matrice qui a pour lignes les r échantillons de la catégorie 2.

Le classement de ces échantillons sera correct si :

$$\begin{aligned} M^+ \underline{k} &> \underline{0} \\ \text{et} \quad M^- \underline{k} &< \underline{0} \end{aligned} \quad (4)$$

Définissons maintenant la matrice A telle que :

$$A = \begin{bmatrix} M^+ \\ -M^- \end{bmatrix}$$

Cette écriture permet de remplacer les deux équations (4) par une nouvelle équation, plus générale :

$$A \cdot \underline{k} > \underline{0} \quad (5)$$

L'équation (5) est dite "Equation d'Apprentissage", et sa solution est régie par le théorème suivant :

"Le générateur de fonction adaptatif ne pourra réaliser une solution de l'équation (5) que si les lignes - c'est-à-dire les éléments $\underline{x}$ codés - de la matrice A sont linéairement indépendants".

La démonstration est immédiate : appelons G la matrice dont les lignes sont constituées des vecteurs $\underline{X}$ possibles, tous différents (leur nombre est égal au nombre de zones de quantification de $\underline{x}$ dans son domaine de variation plausible). Dans ces conditions, l'équation (3) écrite pour cet ensemble X devient $G \underline{k} = \underline{H}$ où $\underline{H}$ est formé des valeurs de $\hat{h}$ correspondant à chacun des X possibles.

La solution, étant $\underline{k} = G^{-1} \underline{H}$, n'existe que si G^{-1} existe : par conséquent, les lignes $\underline{X}^T$ devront être indépendantes.

Le code utilisé doit donc être lui-même linéairement indépendant, tel celui préconisé à l'occasion de l'exemple de la figure 2.

1-3 Application à la commande sous-optimale :

Ainsi que nous l'avons précisé en introduction, nous cherchons dans un problème de commande à classer les éléments d'un ensemble de mesures et paramètres ($\underline{p}$) en trois catégories caractérisées par $u_A(\underline{p}) = 1, -1$ ou 0 , et ceci en fonction de la connaissance des valeurs exactes $u^*(\underline{p})$ pour un échantillon de vecteurs $\underline{p}$.

Ce problème de classement est résolu à l'aide de deux ensembles d'élé-

ments linéaires tels que ceux décrits précédemment.

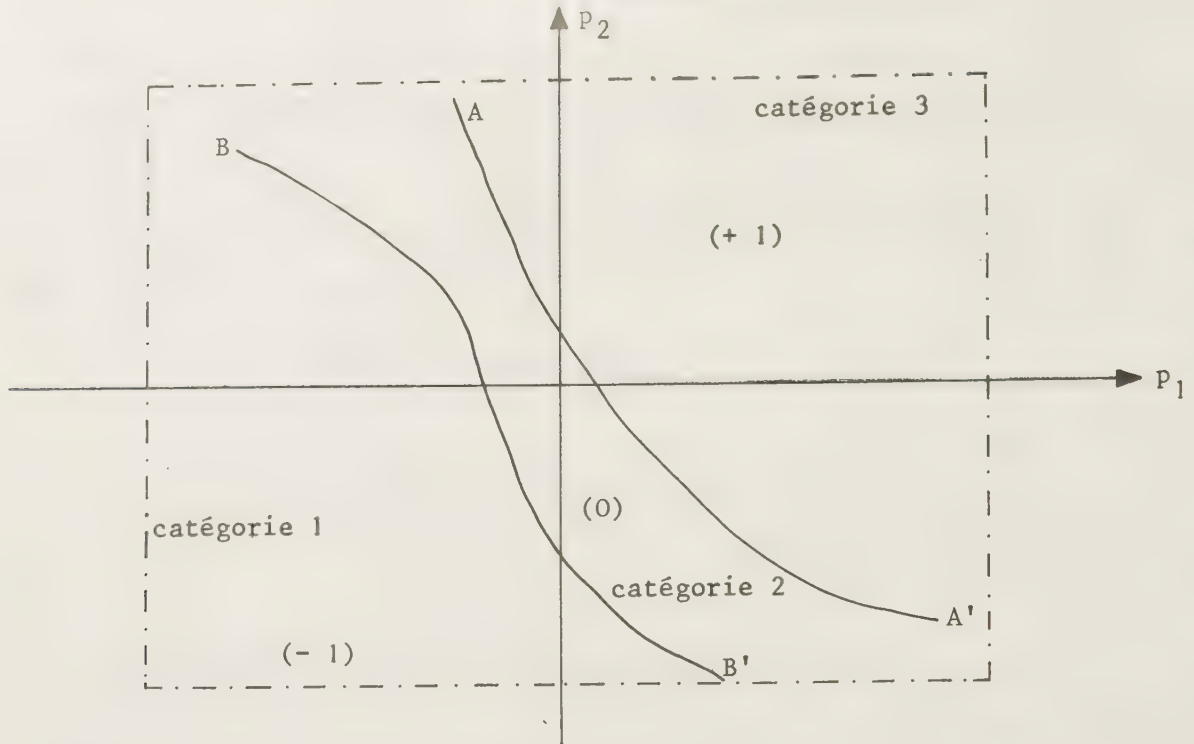


Fig. (3)

Raisonnons, pour cela, sur la visualisation fournie par la figure 3 lorsque $\underline{p}$ est bidimensionnel.

Les deux courbes AA' et BB' délimitent les catégories.

Caractérisons la catégorie 1 par $u_A = -1$

la catégorie 2 par $u_A = 0$

la catégorie 3 par $u_A = +1$

Les valeurs plausibles de p_1 et p_2 sont supposées à l'intérieur du cadre en trait mixte. Dans ce domaine, chaque point peut être représenté par un vecteur $\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ et l'indication de sa catégorie, mais aussi par le vecteur $\underline{p}$ et sa position par rapport aux deux courbes AA' et BB'.

Chacune de ces courbes partage le plan en deux sous catégories :

- à gauche de AA', la catégorie peut être définie par - 1,
à droite par + 1
- à gauche de BB', la catégorie peut être définie par - 1,
à droite par + 1.

Ceci donne l'idée d'employer deux éléments linéaires adaptatifs,

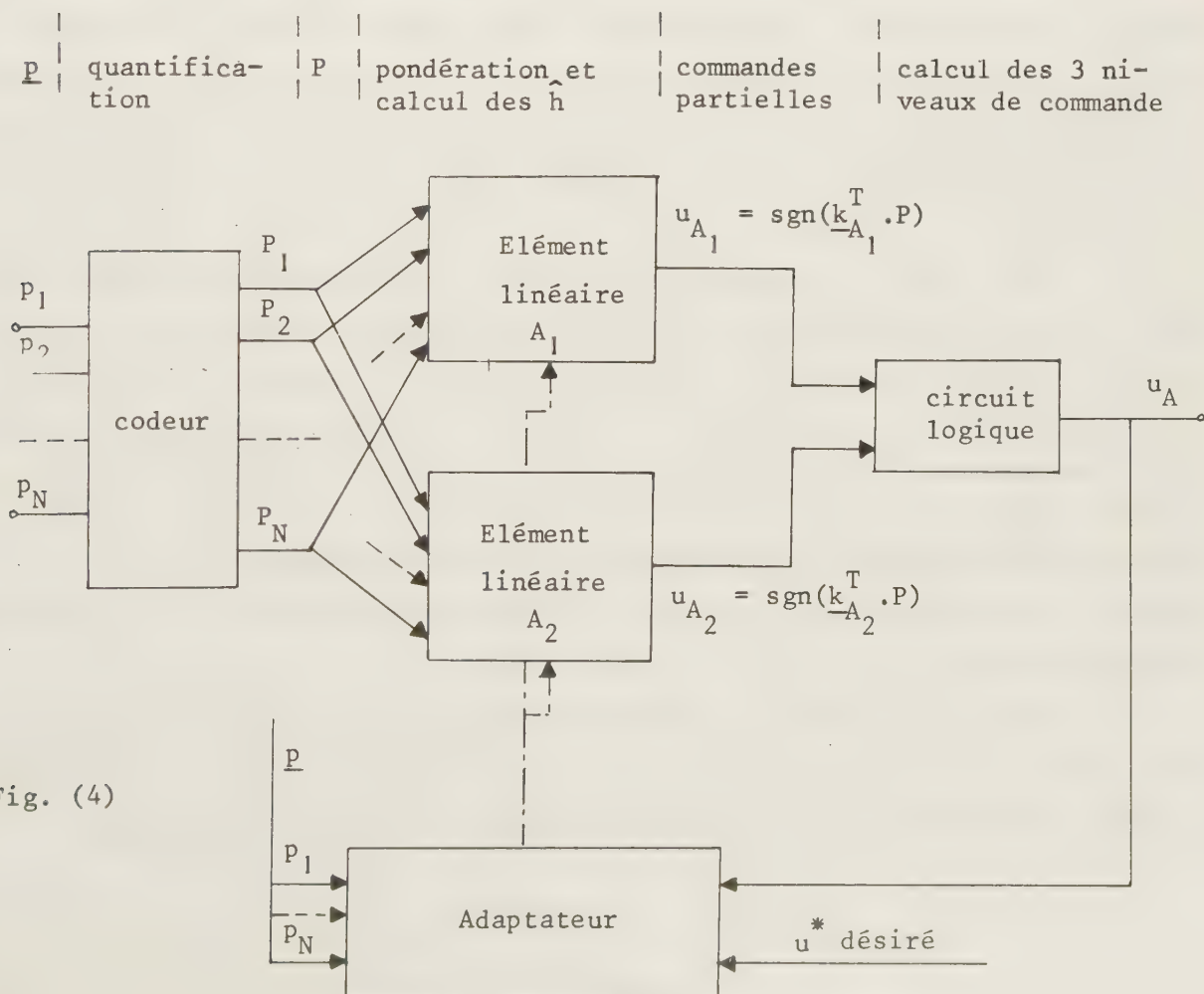
le premier "reconnaissant" AA', le deuxième "reconnaissant" BB', les sorties binaires étant respectivement u_{A_1} et u_{A_2} .

La caractérisation réelle, u_A , peut être retrouvée à partir de u_{A_1} et u_{A_2} d'après la table suivante :

u_{A_1}	u_{A_2}	u_A	catégorie
- 1	- 1	- 1	1
- 1	+ 1	0	2
+ 1	- 1	0	
+ 1	+ 1	+ 1	3

La structure du générateur de fonction adaptatif permettant d'établir la commande sous-optimale est figurée en 4.

On remarquera que ce principe peut être appliqué à une classification en n catégories.



Ayant ainsi présenté l' "anatomie" du générateur de fonction de la commande u_A , il nous reste à en préciser la "physiologie". Le vecteur de commande sous-optimal sera ici obtenu sur ordinateur, mais la simplicité de sa structure est telle qu'il pourrait également être construit au moyen d'éléments de technologie plus classique.

2 - MISE EN OEUVRE DU GENERATEUR DE FONCTION ADAPTATIF -

Nous utilisons à nouveau la formulation générale en x qui avait cours jusqu'au paragraphe 1-2.

2-1 Choix des échantillons :

Dans un problème réel, le nombre d'échantillons possibles peut être considérable. Ainsi, en prenant un échantillon par hypercube de quantification, on aura, par exemple pour un vecteur x à 5 composantes, respectivement quantifiées en 5, 6, 5, 4 et 5 zones, $5 \times 6 \times 5 \times 4 \times 5$, soit 3000 échantillons.

On sera donc amené à ne considérer qu'un nombre restreint d'éléments x (par exemple quelques centaines). On peut choisir les hypercubes qui bordent de part et d'autre l'hypersurface $h = 0$, mais ceci n'est valable que pour un espace de dimensions $N \leq 3$, dans lequel on peut avoir une idée de la forme de cette surface, sinon de son équation analytique. Lorsque $N > 3$, il faut choisir les échantillons dont une connaissance à priori du système a montré la fréquence élevée d'apparition et pour lesquels on connaît la catégorie, autrement dit, en ce qui nous concerne, la commande optimale exacte associée.

Mais le fait de classer correctement les échantillons choisis ne signifie pas que l'ensemble des éléments sera correctement classé. Ceci concerne la notion de "généralisation", qui est la possibilité pour un générateur de fonctions de classer correctement des éléments qui n'ont pas été utilisés pour son apprentissage. Un certain nombre de règles -2- -3- permettent de prédire, du moins théoriquement, si un générateur de fonctions pourra "généraliser" ; la plus commune étant la condition pour $h = 0$ d'être monotone suivant un au moins de ces paramètres ($\frac{\partial h}{\partial x_i} \geq 0$ ou ≤ 0) dans le domaine de variation plausible de ce paramètre.

Même si ces règles ne sont pas vérifiées (ou ne sont pas applicables, étant donné l'importance du processus), le générateur de fonctions tel qu'il a été défini précédemment prouve à l'expérience sa tendance à "généraliser".

2-2 Traitement des échantillons - algorithmes d'apprentissage :

C'est bien entendu un à un que les échantillons sont présentés en générateur de fonction adaptatif ou traités par l'ordinateur. De plus, la vitesse de convergence s'avère accrue pour un ordre de présentation aléatoire.

Les algorithmes utilisés ici sont empruntés au domaine de l'apprentissage. Ils permettent d'ajuster le vecteur $\underline{k}$ de telle sorte que l'équation (5) A. $\underline{k} > 0$ soit vérifiée.

Comme il existe une infinité de solutions $\underline{k}$, l'obtention d'une solution particulière est liée au critère d'arrêt de la méthode d'adaptation, dont le choix peut être dicté par des considérations de rapidité de calcul, ou bien par la nature des composants du générateur de fonction -4- -5-.

Reprenant l'image géométrique, on peut dire que les algorithmes permettent de rendre minimum la distance entre l'hypersurface "vraie" $h = 0$ et l'hypersurface quantifiée $\hat{h} = 0$ qui, rappelons le, dépend de la quantification utilisée.

Afin de préciser la formulation des algorithmes utilisés, définissons $\underline{a}_j$, qui concerne le $j^{\text{ème}}$ échantillon présenté $\underline{X}^j$, par :

$$\begin{aligned} \underline{a}_j &= \underline{X}^j{}^T & \text{si } u^* &= +1 \\ \underline{a}_j &= -\underline{X}^j{}^T & \text{si } u^* &= -1 \end{aligned}$$

Le principe consiste à ne modifier $\underline{k}$ que si l'échantillon présenté est incorrectement classé.

Soit, par exemple :

$$\begin{aligned} \underline{k}(n+1) &= \underline{k}(n) & \text{si } \underline{a}_j \cdot \underline{k}(n) &\geq 0 \\ \underline{k}(n+1) &= \underline{k}(n) + \frac{\beta}{N} \underline{a}_j{}^T & \text{si } \underline{a}_j \cdot \underline{k}(n) &< 0 \end{aligned}$$

β : quelconque > 0

N : dimension de l'espace de référence

On remarquera que la constitution de $\underline{a}_j$ (un 1 et des 0) n'entraîne la modification que d'une seule composante de $\underline{k}$.

Dans une version, dite "par relaxation", cette modification est fonction de l'amplitude de l' "erreur de classement" : β vaut $\alpha[1 - \underline{a}_j \cdot \underline{k}(n)]$ où α est compris entre 0 et 2.

Enfin, la vitesse de convergence peut être améliorée en fin d'adaptation en choisissant une valeur de β liée à l' "état de la convergence" P_{cc} , défini par le rapport du nombre d'échantillons correctement classés au nombre d'échantillons à classer, après n itérations.

Il est préconisé de prendre $\beta = \text{cte}$

si $P_{cc} \leq \Delta$

$$\beta = \frac{|\underline{k}(n)|^2}{2P_{cc}}$$

si $P_{cc} > \Delta$

Δ sera choisi de l'ordre de 0,9.

3 - CONCLUSION -

Afin de récapituler les deux chapitres précédents, nous rappelons que la mise en oeuvre d'un générateur de fonction adaptatif demande successivement :

1 - de quantifier chaque variable - c'est-à-dire chaque composante du vecteur $\underline{x}$ (ou de $\underline{p}$ s'il s'agit d'un problème de commande) - dans son domaine de variation plausible.

2 - de caractériser les hypercubes ainsi définis par un code linéairement indépendant.

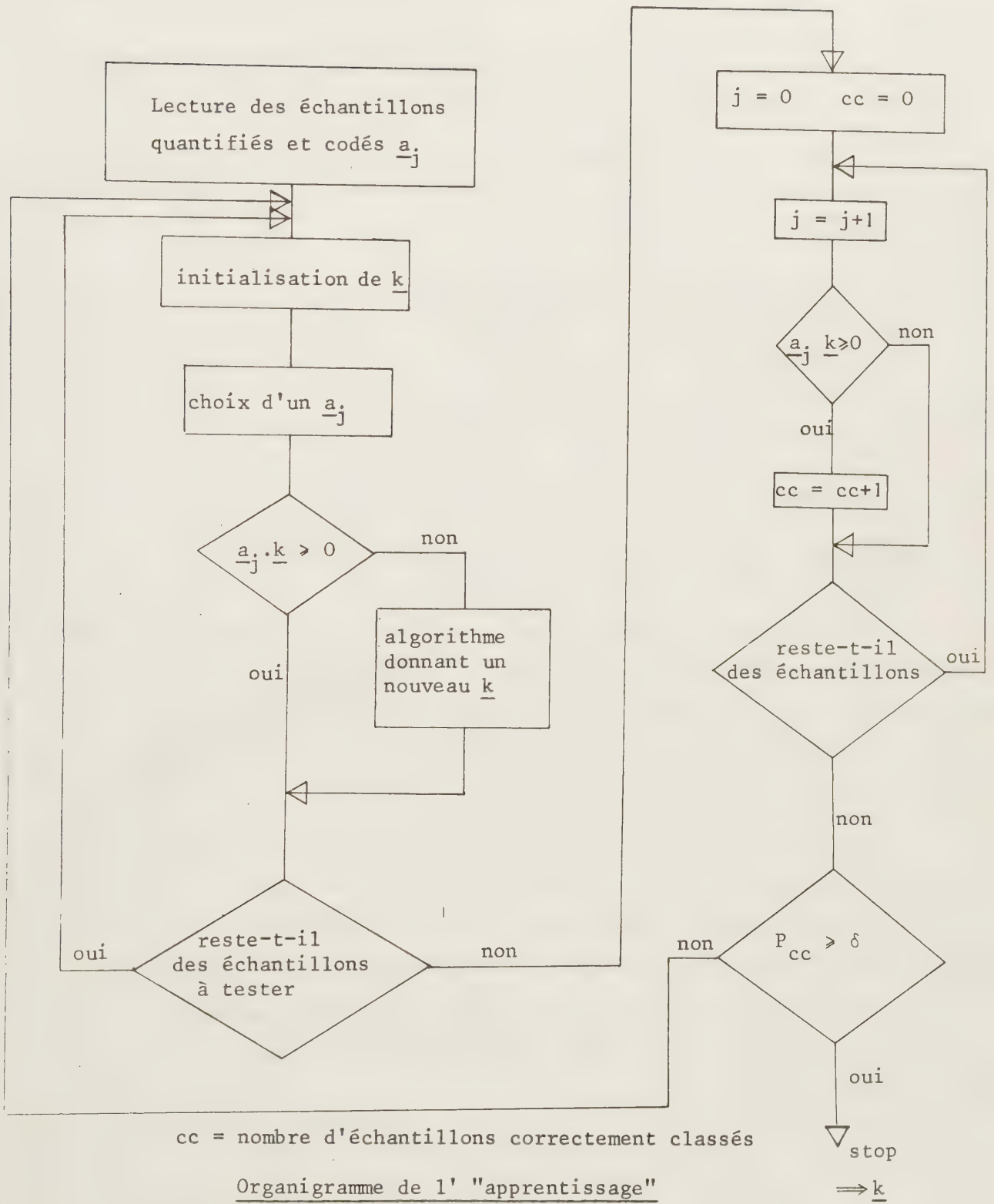
3 - de choisir un certain nombre d'échantillons pour lesquels la catégorie est connue (c'est-à-dire la commande optimale exacte correspondante).

4 - de choisir un algorithme d'apprentissage (mise en oeuvre simple, convergence rapide).

5 - de présenter chaque échantillon à l'entrée du générateur de fonction et la catégorie correspondante à l'entrée de l'adaptateur et d'appliquer l'algorithme jusqu'à l'obtention d'une solution.

La réalisation de ce dernier point fait l'objet de l'organigramme de la figure 5 où l'on peut distinguer deux phases : une phase d'apprentissage, qui aboutit, après passage de l'ensemble des échantillons, à l'ajustement de $\underline{k}$, et une phase de test où l'on calcule, pour le vecteur $\underline{k}$ obtenu dans la phase d'apprentissage, le facteur de qualité P_{cc} . Si P_{cc} est inférieur à une valeur δ fixée à l'avance (par exemple 0,98), le retour s'effectue vers la phase d'apprentissage ; sinon le processus d'itération s'arrête, fournissant le vecteur pondérateur $\underline{k}$ qui génère la commande "en ligne".

Cet exposé théorique permet d'aborder maintenant l'application à la régulation sous-optimale dynamique à laquelle nous avons fait allusion au paragraphe 1-3.



— Fig. (5) —

4 - REGULATION SOUS-OPTIMALE -

Nous avons choisi deux exemples d'application parmi ceux précédemment cités dans ce mémoire :

- d'une part, l'étude en simulation du double intégrateur dont un état est contraint (cf 2ème partie - chapitre IV §§ 1 et 4-1)

- d'autre part, la commande "en ligne" de la chaîne de surchauffe du générateur de vapeur (5 états) lors d'un fonctionnement en télé-réglage (butées hors d'atteinte).

4-1 Commande sous-optimale d'un problème de butée :

Considérons le processus d'équations :

$$\dot{x}_1 = a x_2 \quad (1) \quad x_1(0) = x_{10} \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = k u \quad (2) \quad x_2(0) = x_{20} \quad (4)$$

dont on cherche la commande $u^*(t)$ satisfaisant $|x_2| \leq B$

et minimisant $J = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + \alpha^2 u^2) dt$ où T est fixé.

Les conditions d'optimalité de ce problème ont été établies aux chapitres III et IV (2ème partie) et l'on sait notamment que la grandeur B peut indifféremment être considérée comme une butée ou comme une contrainte.

Un faisceau de trajectoires optimales exactes, pour des conditions initiales variables, est tracé sur la figure 6.

Les valeurs numériques correspondantes sont $a = 1,25$ $k = 6 \cdot 10^{-3}$
 $\alpha = 10$ $T = 200 \text{ sec.}$ $B = 0,02$

Les trajectoires correspondant à des valeurs opposées des conditions initiales sont évidemment symétriques par rapport à l'origine du plan (x_1, x_2) .

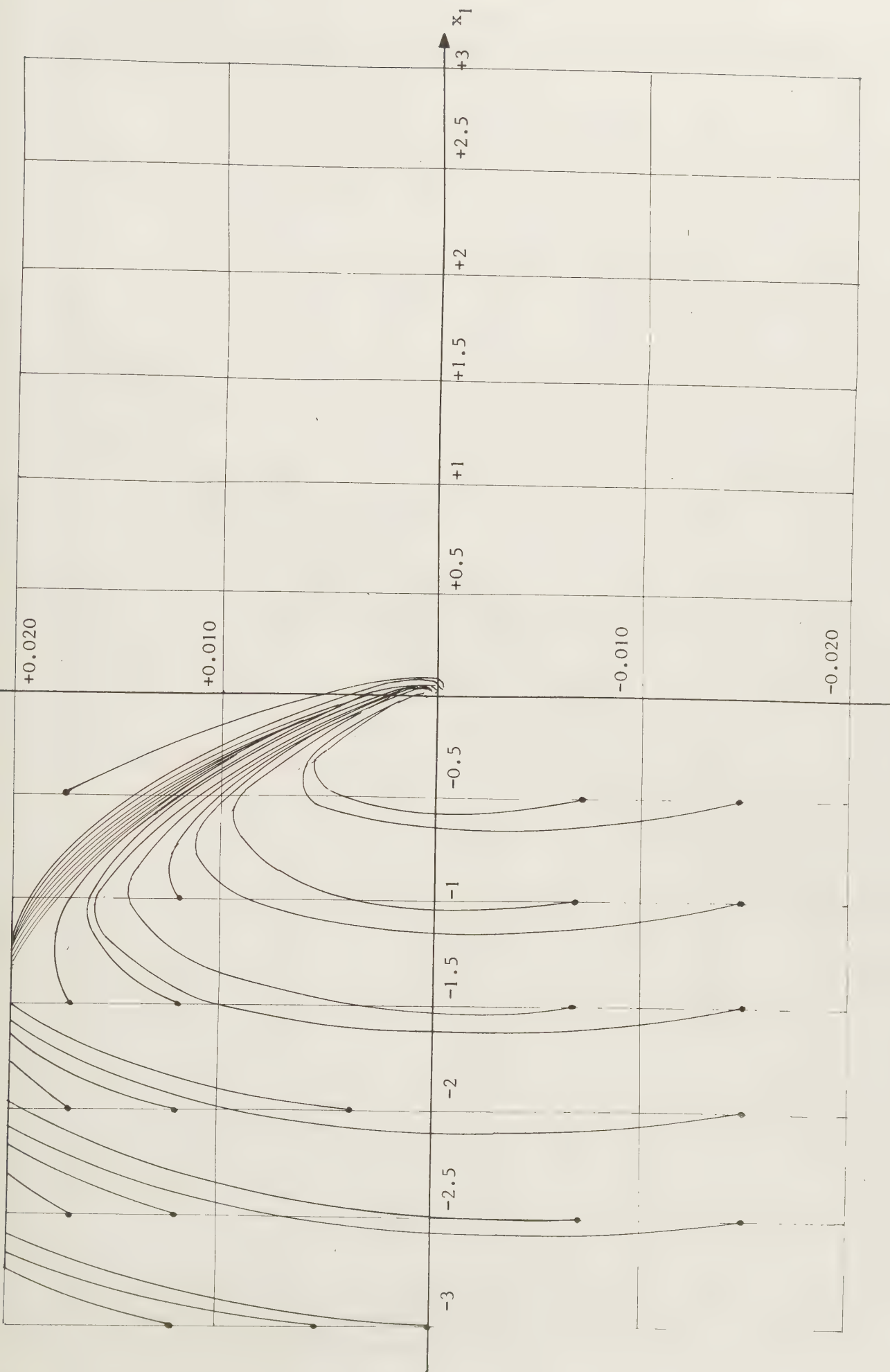
Le domaine des variations de x_1 est $[-3, +3]$, par référence à la réalité : rappelons qu'en effet x_1 peut figurer la pression dans le ballon du générateur de vapeur pilote.

Ce faisceau (figure 1) constitue l'échantillon des trajectoires optimales qui doivent permettre d'obtenir les fonctions :

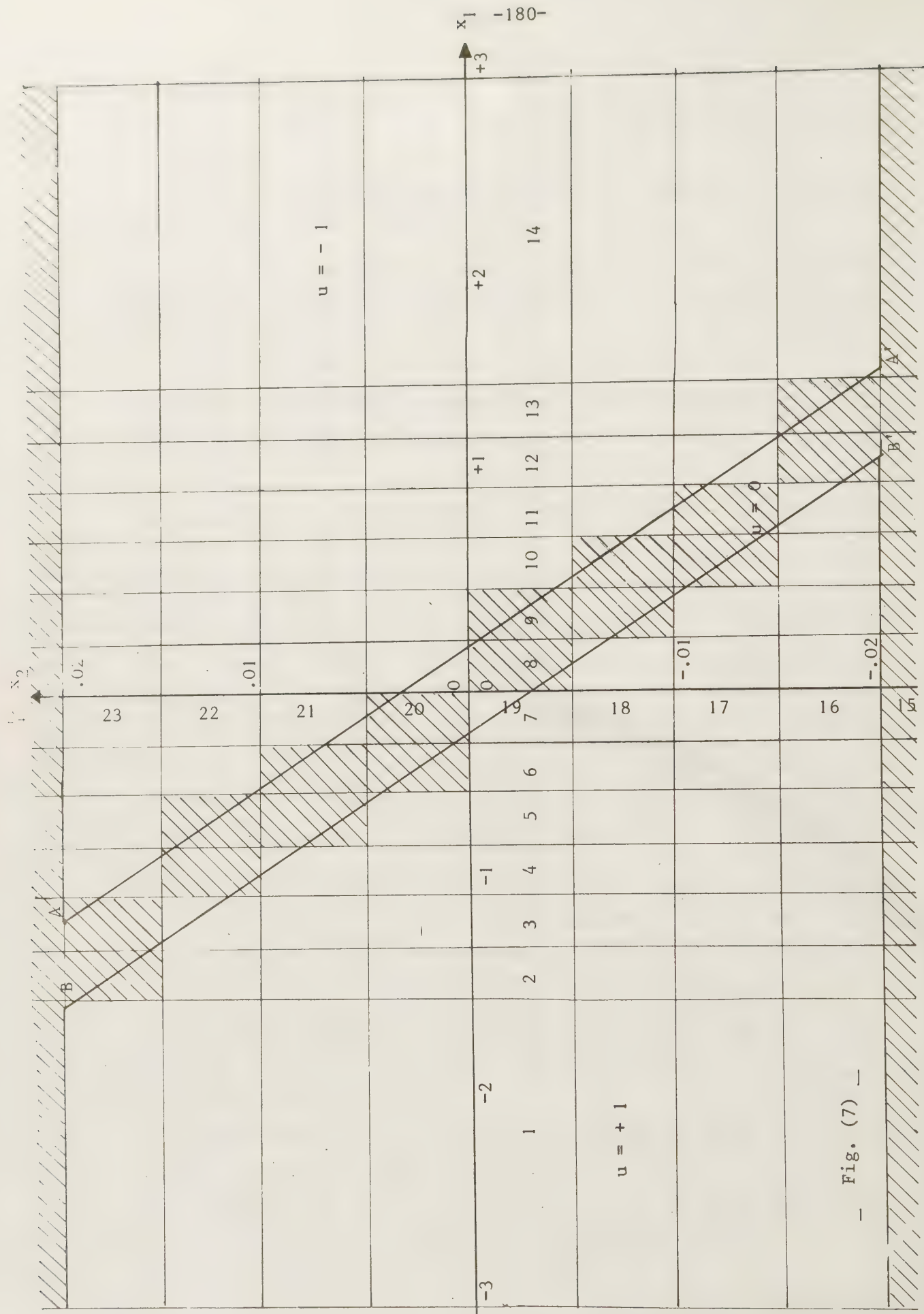
$$u_{A_1} = \text{signe } k_{A_1}^T \underline{X}$$

$$\text{et } u_{A_2} = \text{signe } k_{A_2}^T \underline{X} \quad \text{où } \underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

qui d'après le paragraphe ci-dessus 1-4 fourniront la commande sous-optimale u_A



— Fig. (6) —



— Fig. (7) —

à 3 niveaux. Il est bon de préciser que dans cet exemple nous ne recherchons qu'à générer les trajectoires de la figure 6.

Les vecteurs binaires $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ représentent les grandeurs x_1 et x_2 quantifiées (ici $\underline{p} = (x_1, x_2)$). Les zones de quantification des états sont indiquées sur la figure 7 (numéros 1 à 14 pour x_1 , 15 à 24 pour x_2).

La quantification de la commande est réalisée comme suit :

Soit U_m la valeur absolue de la moyenne des grandeurs de commande prises de manière discrète sur les trajectoires optimales de l'échantillon de la figure 6. Nous décidons que u_A prendra la valeur dite + 1 si la valeur de u^* correspondante est supérieure à U_m . De la même façon $u_A = -1$ si $u^* < -U_m$, et bien entendu $u_A = 0$ si $|u^*| < U_m$.†

Dans ces conditions, la zone correspondant à la commande de niveau nul est située sur la figure 7 entre les courbes AB et A'B'. Dans le domaine quantifié cette zone devient, par exemple, la portion hachurée.

Au lieu, cependant, de faire apprendre au "générateur de fonction adaptatif" cette forme complexe, il est plus judicieux de considérer la zone hachurée hors butées et de l'étendre par continuité dans la région où $|x_2| > B$ (figure 8).

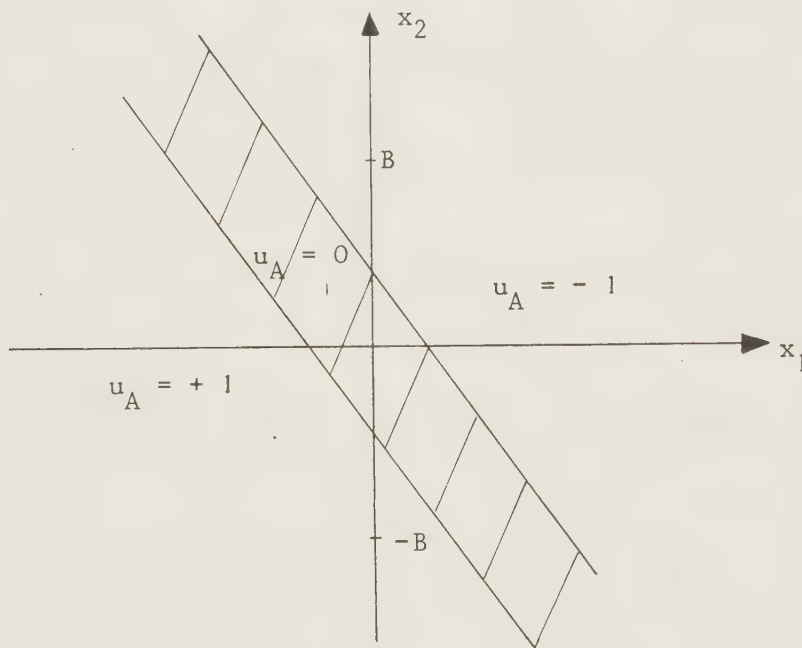


Fig. (8)

† Il est important de noter que pour la commande en ligne, le niveau 1 de u_A correspondra à une valeur pouvant être différente de U_m , à la disposition de l'utilisateur et permettant d'améliorer la qualité de la sous-optimalité.

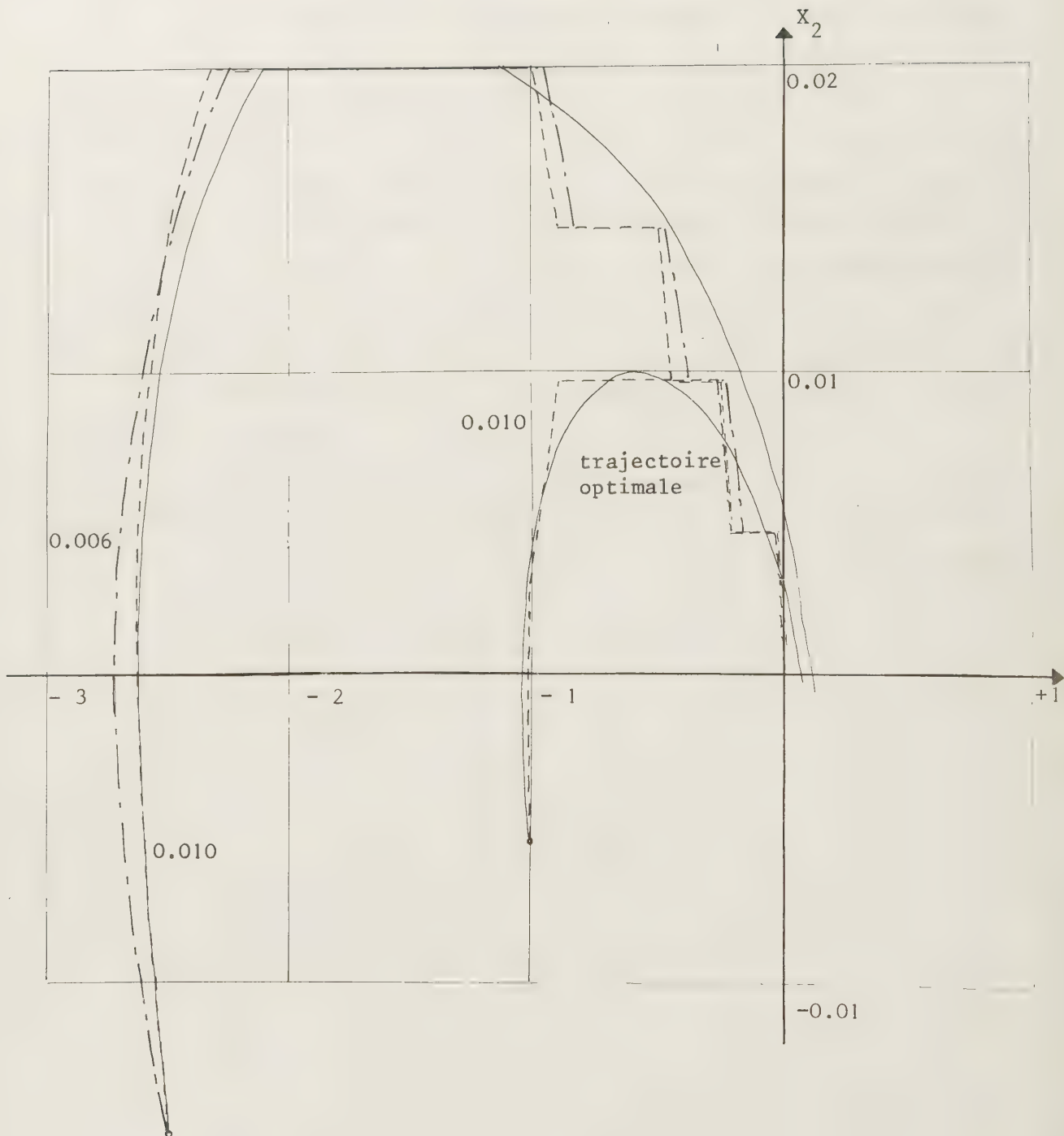


Fig. (9)

Il suffira alors d'adjoindre, lors de la commande en ligne, une logique qui donne à la grandeur de commande la valeur 0 si $x_1 < 0$, $x_2 = B$ et $u_A = \begin{smallmatrix} +1 \\ 0 \end{smallmatrix}$, ou bien si $x_1 > 0$, $x_2 = -B$ et $u_A = \begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}$.

Après un apprentissage de 70 secondes sur IBM 1130, on obtient les résultats indiqués figure 9. En traits pleins, se trouvent représentées 2 trajectoires optimales exactes, tandis que les pointillés figurent les trajectoires sous optimales obtenues par application de la "commande apprise". Deux valeurs correspondant à $u_A = 1$ ont été utilisées : 0,006 et 0,01, qui permettent d'approcher les courbes optimales.

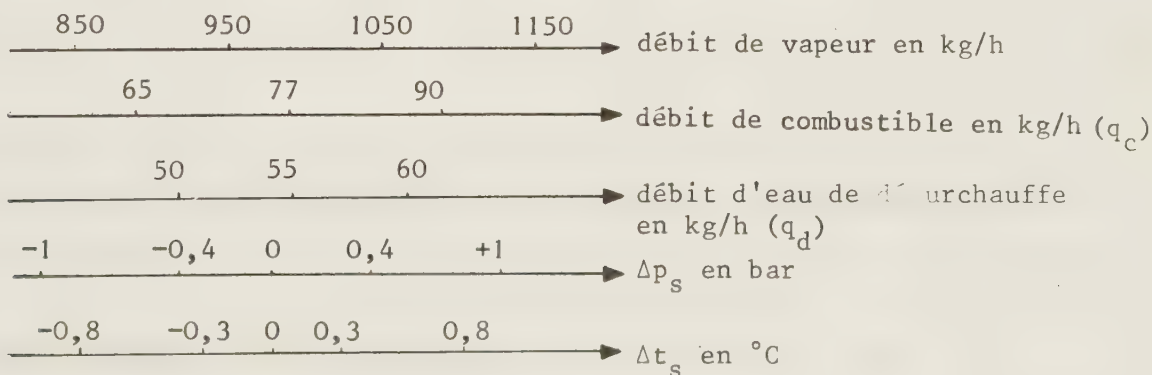
Deux conclusions peuvent être tirées de cette étude :

- 1) les butées n'apportent aucune complication pour autant que l'on veille à la "régularité" de l'hypersurface de séparation à reconnaître.
- 2) la précision obtenue apparaît acceptable, mais il est bon de s'en assurer sur un exemple pratique (cf 4-2), car le critère de précision est bien sûr lié à la qualité du modèle du processus à réguler.

4-2 Commande "en ligne" du générateur de vapeur :

Nous reprenons ici le modèle de la chaîne de surchauffe utilisé dans le dernier chapitre de la seconde partie (§ 4-2-3), et donc considérons que les deux commandes - c'est-à-dire les dérivées par rapport au temps des débits de combustible et d'eau de désurchauffe - ne prennent chacune que trois valeurs + 1, - 1 et 0. D'autre part, les grandeurs mesurées - c'est-à-dire les pression et température de surchauffe, les débits de combustible et d'eau de désurchauffe, le débit de vapeur - sont quantifiées.

Supposant un fonctionnement autour d'une charge moyenne correspondant à 1000 kg/h de vapeur, le débit de vapeur évolue dans 5 zones (cf fig. 10).



Quantification du "vecteur paramètre" p à classer.

— Fig. (10) —

A ces zones, indiquant des variations probables dans une fourchette de 300 kg/h autour de 1000, correspondent des zones pour les débits d'entrée q_c et q_d . Enfin, la quantification des écarts de régulation Δp_s et Δt_s est liée à leurs variations maximales probables et aux cycles limites admissibles.

Le but de la présente expérience est de montrer que la régulation sous-optimale par apprentissage donne, sur processus réel, les mêmes performances que celles obtenues par la régulation optimale de référence. Cette dernière est ici l'optimisation quadratique à bouclage stationnaire traitée dans la 1ère partie de ce rapport.

La figure 11 montre deux réponses du générateur de vapeur à des échelons de charge. Le système est piloté à gauche par la régulation optimale de référence, à droite par la commande sous-optimale. Celle-ci a été obtenue à partir de 3840 échantillons et sa mise au point a nécessité 50 minutes d'ordinateur IBM 360-25.

La commande en ligne proprement dite requiert l'écriture de 5 lignes de programme FORTRAN, dont le "temps machine" est évidemment négligeable. Dans notre expérience sur unité pilote, ce programme fonctionne sur interruptions toutes les 20 secondes (pour un système ayant un temps de réponse de 3 à 4 minutes).

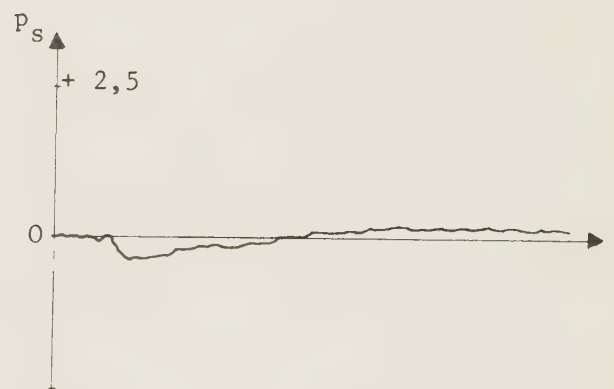
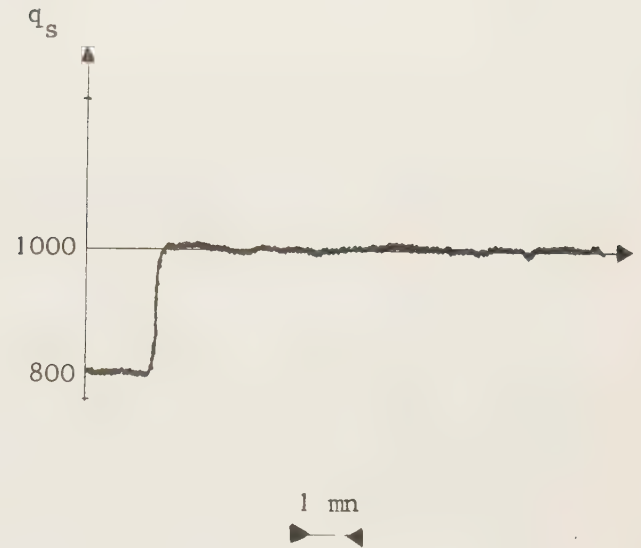
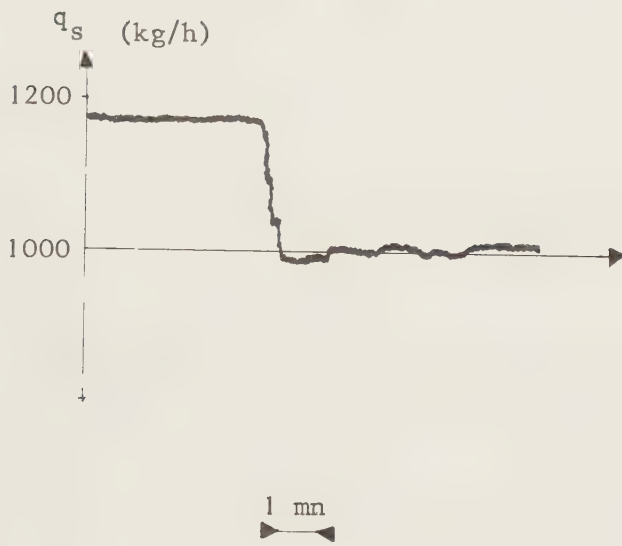
On remarque que les amplitudes des écarts et leurs temps de réponse sont tout à fait comparables, avec une légère tendance à l'oscillation en régime permanent pour la stratégie sous-optimale. Ceci est inhérent à la quantification et n'est nullement gênant en présence de perturbations aléatoires.

5 - CONCLUSION -

La mise en oeuvre d'une commande sous-optimale, utilisant un échantillon de trajectoires optimales exactes, peut être réalisée au moyen d'une structure élémentaire en boucle fermée sur les mesures du processus quantifiées. Cette régulation, employant ici un ordinateur, est, bien entendu, réalisable dans une technologie plus classique.

Malgré la simplicité de la structure choisie, cette méthode permet d'obtenir sur processus des résultats comparables à ceux issus de l'application de la régulation optimale servant de référence. De plus, la prise en compte de butées ne complique pratiquement pas l'apprentissage.

Les limites de la méthode se situent, d'une part, dans le temps de mise au point hors ligne, et, d'autre part, dans une insuffisance du nombre des valeurs prises par les commandes (3) lorsque les domaines de variations des grandeurs quantifiées sont importants.



Réponses sous-optimales

Réponses optimales

Fig. (11)

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- B. WIDROW - "Pattern Recognition and adaptative control"
IEEE Trans. on Automation and Industry
Vol. 83 pp 269-277 Sept.64

- 2- F.W. SMITH - "Contactor control by adaptive pattern recognition tech-
niques" Stanford electronics laboratories SU-SEL 64002
April 1964

- 3- J.W. BERKOVEC - "On time optimal control with threshold Logic units"
D.L. EPLEY 1964 WESCON, August 1964

- 4- J.J. ZAPALAC - "Self organizing control systems vol.1"
Douglas Report SM 47857 July 1965

- 5- C.H. MAYS - "Adaptative threshold Logic"
Technical Report SEL 63-027 (TR 1557-1)
STANFORD ELECTRONICS LABORATORIES Calif. April 1963

- 6- J.M. MENDEL - "Self organizing control systems vol.3"
J.J. ZAPALAC Douglas Report SM 51975 Feb. 1966
Missile and Space Systems division -
Douglas aircraft company - California -

- 7- M. AZEMA - "Commande sous-optimale"
Y. THOMAS Annexe VII - Rapport final D.G.R.S.T. 68-01-409

- 8- M. AZEMA - "Commandes sous-optimales par algorithmes d'apprentis-
sage" Thèse de Doctorat d'Ingénieur - 1970

CONCLUSION

A la régulation classique dont la théorie repose sur l'usage des transformées en s ou en z et qui, de ce fait, est limitée aux processus monovariables, nous avons opposé l'optimisation dynamique fonctionnelle que nous considérons beaucoup plus comme un moyen de commande que comme la recherche effective d'un optimum.

La mise en oeuvre d'une telle régulation nous paraît devoir passer par deux étapes dont l'une peut être franchie dès maintenant - la régulation optimale par critère quadratique - et dont l'autre, qui verra la prise en considération des contraintes inégalités de fonctionnement du processus et des butées des organes de réglage, devra probablement attendre la prochaine génération de calculateurs hybrides. Cependant dans le cas où cela s'avèrera souhaitable ou nécessaire, ce type de régulation, tenant compte des contraintes, pourrait être réalisé à plus court terme de manière sous-optimale à partir de trajectoires optimales calculées "hors ligne".

Ces considérations ont dicté les trois parties que nous avons développées dans ce rapport.

La première partie a d'abord montré l'intérêt de l'optimisation quadratique des systèmes linéaires ou linéarisés, par rapport aux théories de l'espace d'état, tels le découplage, l'invariance et la commande modale : cet intérêt réside dans le fait que le choix d'un minimum de coefficients - ceux

d'un critère de performance judicieusement établi - permet, non seulement d'obtenir les caractéristiques habituellement recherchées en régulation classique - stabilité asymptotique, structures utilisant des tendances, insensibilité des sorties aux paramètres et aux perturbations - mais aussi de "doser" le dilemme performances - vieillissement du processus.

Cette méthode de régulation, comme toutes celles de l'espace d'état, impose de déterminer le vecteur d'état à partir des mesures effectuées sur le processus. Une étude aussi exhaustive que possible s'est attachée à définir, par un raisonnement physique intuitif, la structure requise par un bon "re-constructeur d'état". Dans le cas idéal où les prises de mesures sont "représentatives" des dynamiques du processus, on se satisfera volontiers de la mise en oeuvre aisée et immédiate d'observateurs statiques basés par exemple sur la pseudo inverse.

Sinon, on utilisera un observateur dynamique fondé à la fois sur la connaissance des dynamiques du système et sur les informations courantes provenant de ce système sous forme de mesure. Dans une optique déterministe, ceci revient à employer les observateurs de LUENBERGER, dont l'ordre est égal au nombre d'états diminué du nombre de mesures. Dans une optique stochastique, les estimateurs de KALMAN, bien que nécessitant une mise en oeuvre plus importante, permettent de prendre en compte, sous forme de signaux aléatoires, les imprécisions du modèle dues à sa structure simplifiée ou linéarisée. C'est là la grande puissance des théories stochastiques appliquées aux problèmes de commande. Dans une présentation de l'application du principe de "séparation" (optimaliseur quadratique + estimateur de KALMAN) à la commande d'un générateur de vapeur pilote fonctionnant en télé réglage, nous avons montré que notamment le statisme pouvait être supprimé en adjoignant au modèle du processus des bruits de WIENER figurant ses imprécisions.

En définitive, la régulation optimale quadratique des processus évoluant autour d'un point de fonctionnement apparaît comme la synthèse multivariable, théorique et même pratique, des systèmes de régulation classique améliorés au gré de l'imagination de l'ingénieur.

La prise en considération rigoureuse des contraintes et butées formulées par des inégalités statiques a fait l'objet de la seconde partie où l'on a pu distinguer deux points de vue : celui de l'invariant imbedding et celui des méthodes variationnelles. Nous avons d'abord démontré la validité d'équations d'invariant imbedding en présence de contraintes sur le vecteur de commande puis établi un algorithme de calcul des trajectoires optimales d'un système à une commande contrainte et muni d'un critère quadratique.

Comme la caractéristique principale de ces méthodes est de calculer simultanément plusieurs trajectoires, le procédé est tout-à-fait indiqué pour l'établissement hors ligne d'un catalogue de réponses destinées soit au choix d'un utilisateur soit comme informations susceptibles d'engendrer une stratégie de commande.

Le point de vue des méthodes variationnelles nous a permis d'aborder le problème des contraintes et butées sur le vecteur d'état. Après une étude théorique synthétique, nous nous sommes attachés au traitement sur calculateur des conditions d'optimalité résultantes se présentant sous la forme de systèmes différentiels à valeurs limites en plusieurs points. L'adaptation des méthodes de NEWTON et du gradient a permis de développer des algorithmes hybrides et l'on peut affirmer qu'il est à l'heure actuelle techniquement possible de calculer la trajectoire optimale d'un système d'ordre 4 à 6 en un temps avoisinant la seconde, donc tout-à-fait compatible avec les temps de réponse de la majorité des processus industriels. Il reste, cependant, que ces algorithmes sont nécessairement des outils de spécialistes dans la mesure où la génération des calculateurs hybrides avec câblage automatique par programme du système analogique n'a pas encore vu le jour.

Tout en rappelant donc qu'en hybride la vitesse de calcul des trajectoires optimales contraintes est sans commune mesure avec celle que l'on obtiendrait sur des machines numériques d'importance identique, il était bon d'examiner dans une troisième partie une méthode sous-optimale en boucle fermée sur les mesures, utilisant un échantillon de résultats optimaux obtenus hors ligne.

En choisissant pour la commande la structure la plus simple possible et en empruntant des algorithmes de calcul "hors ligne" au domaine de l'apprentissage, nous avons fait ressortir que la commande sous-optimale ainsi obtenue fournit sur processus des performances identiques à celles données par l'application de la commande optimale de référence.

Pour en revenir à la régulation quadratique dont le champ d'application recouvre toutes les régulations actuelles utilisant des PID, disons que son atout est double : d'une part, cette méthode recèle les principes analogiques profondément ancrés chez les techniciens actuels et, d'autre part, elle

est également bien adaptée à l'ordinateur. Ce n'est donc pas un hasard si l'on observe depuis près de deux ans un regain d'intérêt même théorique pour ce sujet. Actuellement, son succès paraît subordonné à deux éléments : une rapidité accrue du calcul de la matrice de RICCATI et un choix plus précis des coefficients du critère de performance en fonction des temps de réponse désirés par l'utilisateur.

Ces deux améliorations sont actuellement étudiées au Laboratoire d'automatique de l'ENSM et on peut dire dès maintenant quant au premier point, qu'une matrice de RICCATI 5×5 est calculable sur une IBM 1130 en deux minutes. Pour le second point, il nous paraît important de laisser l'utilisateur choisir les temps de réponse en connaissance de cause, c'est-à-dire en sachant ce que la performance ainsi retenue entraînera quant aux variations d'énergie d'entrée (et par conséquent, au vieillissement présumé du processus). Il y a là matière importante à recherches et la prise en considération d'un point de vue qui est depuis longtemps, implicitement, celui de nombreux industriels.

Une question vient à l'esprit : qu'advient-il dans les nombreux cas où le processus possède des retards purs ? Ou bien ces retards ne sont pas suffisamment importants pour impliquer une élévation sensible de l'ordre du modèle d'état et l'optimalisation quadratique, telle que décrite ici, s'applique ; ou bien la représentation du processus par un modèle d'état d'ordre raisonnable n'est plus possible et on aura recours à l'emploi d'un modèle par séquences de pondération auxquelles on associera un critère quadratique. On est ainsi conduit à une commande purement digitale ayant les caractéristiques de la version numérique de l'optimalisation quadratique ci-dessus.+

Cette étape des régulateurs quadratiques, qui nous paraît pouvoir être franchie dans un proche avenir, et justifier l'emploi des calculateurs de processus, incitera assurément des prolongements consistant notamment prendre en considération, si besoin est, les contraintes inégalités et les butées. C'est alors que tant des méthodes hors ligne de calcul de trajectoires contraintes que des algorithmes de calcul "en ligne" verront leur développement s'accélérer en fonction de l'augmentation de la taille des mémoires centrales et de l'utilisation aisée d'intégrateurs analogiques rapides. C'est pourquoi un point de vue tel que celui de l'invariant imbedding mérite que l'on s'y intéresse de près : la généralisation de l'algorithme décrit ici, au cas multivariable est actuellement envisagée ainsi que son adaptation au cas où l'état est contraint. Pareillement, nous prévoyons de développer d'autres algorithmes hybrides simplifiés propre à une commande "en ligne" d'un systè-

+ Cf. rapport final DGRST 68-01-409 - Annexe III (ESPELLE - DE LARMINAT).

me contraint.

Ces recherches entreront prochainement dans le cadre d'une application à un processus réel - une centrale thermique - constituant ainsi l'aboutissement normal de recherches effectuées jusqu'ici en simulation et sur unité pilote.

LE GENERATEUR DE VAPEUR

DU LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE DE L'E.N.S.M.

Le rôle principal d'une unité pilote est, peut-on dire, de se comporter comme l'unité industrielle correspondante, tout en ayant l'avantage d'être exempté d'impératifs de production.

Dans quelle mesure le générateur de vapeur de l'E.N.S.M. assume-t-il ce rôle et peut-il être considéré comme une unité pilote ?

Telle est la question à laquelle nous nous proposons de répondre.

Dans ce but, la description d'une tranche de centrale thermique et de ses contraintes de régulation précédera celle de notre unité et permettra d'indiquer l'intérêt et les limites du pilote. Un dernier paragraphe fournira un ensemble d'équations de fonctionnement utilisées par les régulations optimales de ce rapport.

1 - LES CENTRALES ELECTRIQUES -

1-1 Considérations générales :

L'ensemble français des centrales thermiques, hydroélectriques et nucléaires participe à une production de puissance électrique requise par le pays et ayant qualitativement sur 24 heures l'allure de celle de la figure (1) courbe (1).

En fonction de cette demande prédite, le dispatching général assigne aux dispatching régionaux un programme de puissance à fournir, lequel est réparti par ces derniers entre les différents groupes.

La figure (1) montre que l'on peut distinguer :

- les centrales de base qui fournissent la majeure partie de la consommation et qui sont pratiquement toujours en régime permanent. Leurs variations de charge sont de toute façon lentes et de faible amplitude (c'est le cas des centrales thermiques de grande puissance et des centrales nucléaires)

- les centrales de réglage qui répondent, d'une part à un programme de charge à grandes variations et d'autre part à des perturbations

aléatoires (centrales thermiques de moyenne puissance). La composante aléatoire est due au fait qu'il y a à tout moment un écart entre la courbe de consommation prédite (1) (figure 2) et la courbe de consommation réelle : or, sauf pénurie ou incident majeur, la production doit être adaptée à la consommation, tout en assurant le maintien de la fréquence. Cette régulation est d'ailleurs assurée par l'ensemble du réseau européen et se matérialise par des programmes de puissance tels que celui de la figure (2) qui correspond à l'un des groupes de la Centrale de Nantes - Cheviré (18-12-69, groupes 3 et 4).

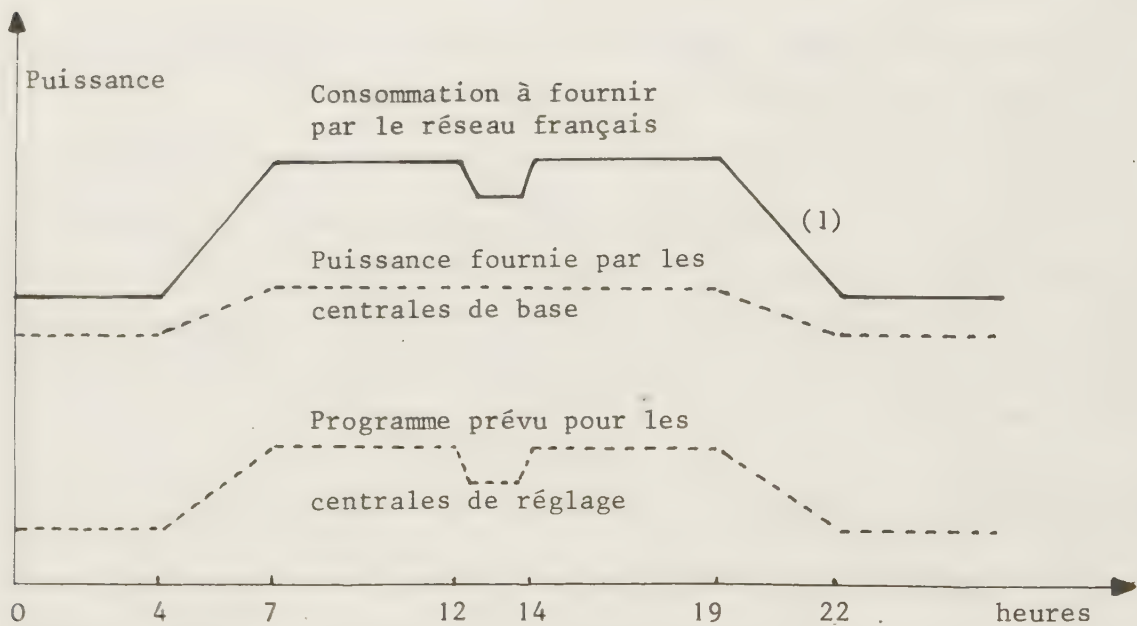


Fig. (1)

Du point de vue de la régulation, ce sont évidemment les centrales de réglage qui présentent un intérêt important du fait de l'éclectisme des perturbations auxquelles elles doivent faire face. Cet éclectisme exige, en effet, au moins deux types principaux de régulation :

- une régulation stochastique autour d'un point de fonctionnement utilisant un modèle linéarisé.
- une régulation déterministe en présence de grandes variations de charge, tenant compte des contraintes et butées qui pourront être atteintes.

Une première question vient à l'esprit : comment se matérialise sur un générateur de vapeur la charge perturbatrice.

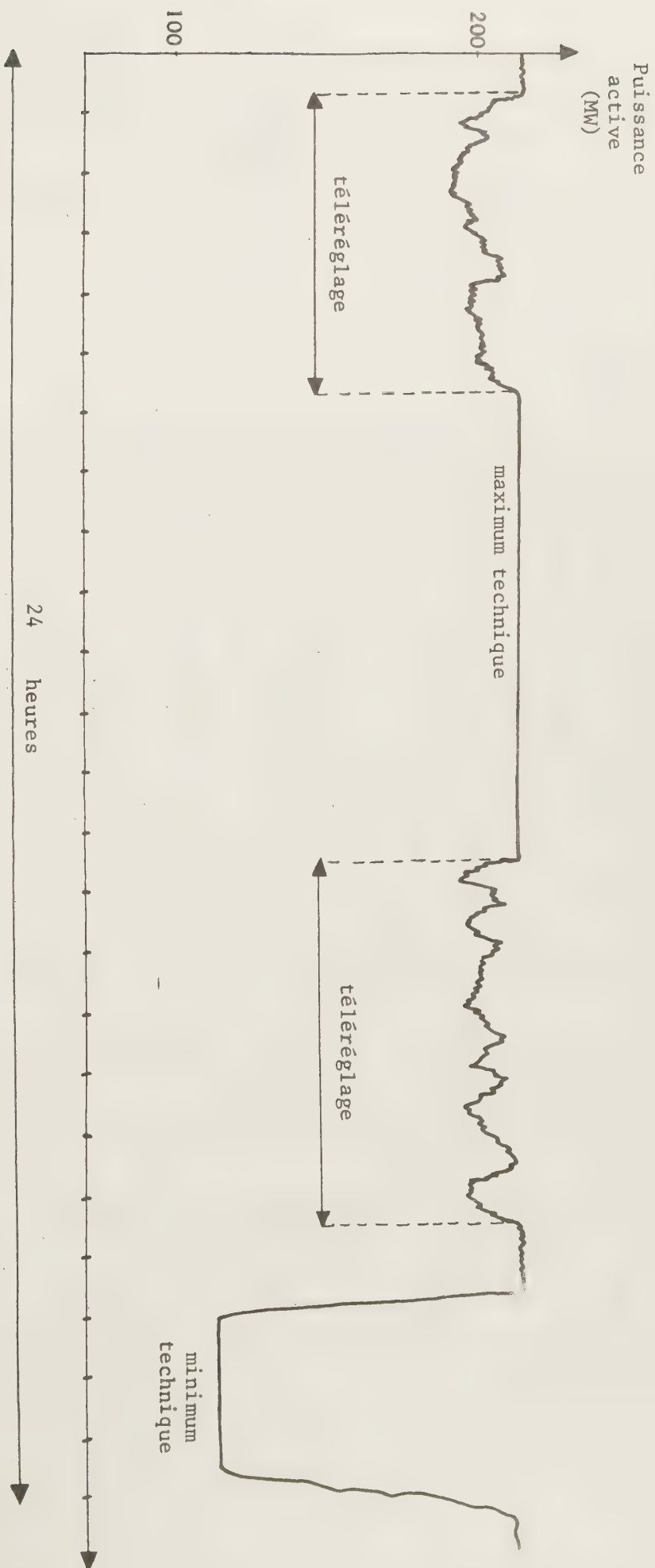


Fig. (2)

Enregistrement type de la puissance active fournie par la centrale de NANTES-CHEVIRE
(groupes 3 et 4 - $p_s = 89$ bars - $t_s = 540^\circ\text{C}.$)

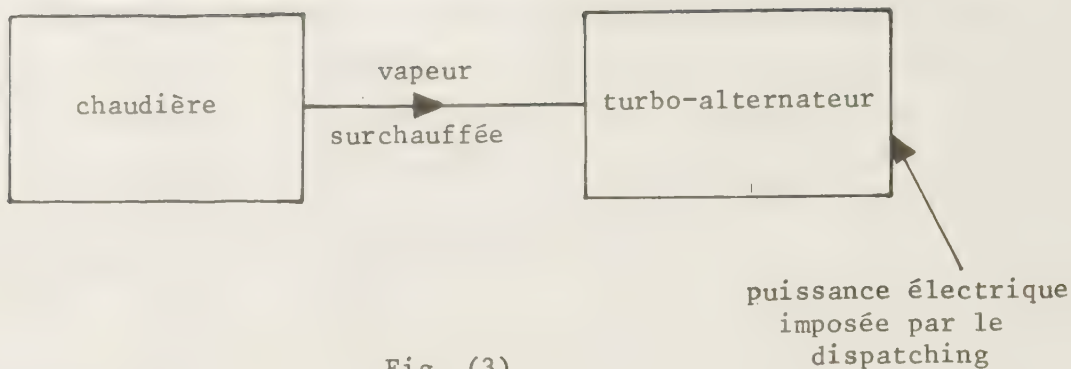


Fig. (3)

Les groupes thermiques français sont constitués généralement d'un générateur de vapeur à circulation naturelle injectant de la vapeur, à pression et température constantes, dans un turbo-alternateur (fig. 3). Contrairement aux générateurs de vapeur à circulation forcée, fréquents aux U.S.A. et possédant des temps de réponse très courts (tendant vers ceux des organes réglants), ces systèmes sont tels que les dynamiques de la turbine peuvent être négligées devant celles de la chaudière ; en conséquence la puissance électrique demandée au groupe correspond instantanément au débit de vapeur fourni par la chaudière (en supposant toutefois que celle-ci soit parfaitement régulée et qu'ainsi l'enthalpie de la vapeur reste constante). Il suffit donc, du point de vue de la régulation, d'utiliser des équations ne représentant que la chaudière, avec pour perturbation principale le débit de vapeur. Pratiquement donc, il faudra, sur unité-pilote, pouvoir faire suivre au débit de vapeur un programme aléatoire et utiliser, pour cela, la charge ou la régulation de vitesse du turbogénérateur associé à la chaudière.

C'est déjà une simplification appréciable de pouvoir isoler la chaudière en un sous-système. Nous allons maintenant montrer qu'il est possible d'aller plus loin dans cette voie en décomposant le générateur de vapeur lui-même en plusieurs sous-systèmes à réguler indépendamment les uns des autres.

1-2 Description d'une chaudière de centrale :

Bien qu'il y ait des variantes possibles (notamment cycle à soutirages) le cycle eau-vapeur de base pour une chaudière à ballon est un cycle à resurchauffe. Voici, à l'aide des figures 4 et 5, une description succincte du circuit eau-vapeur.

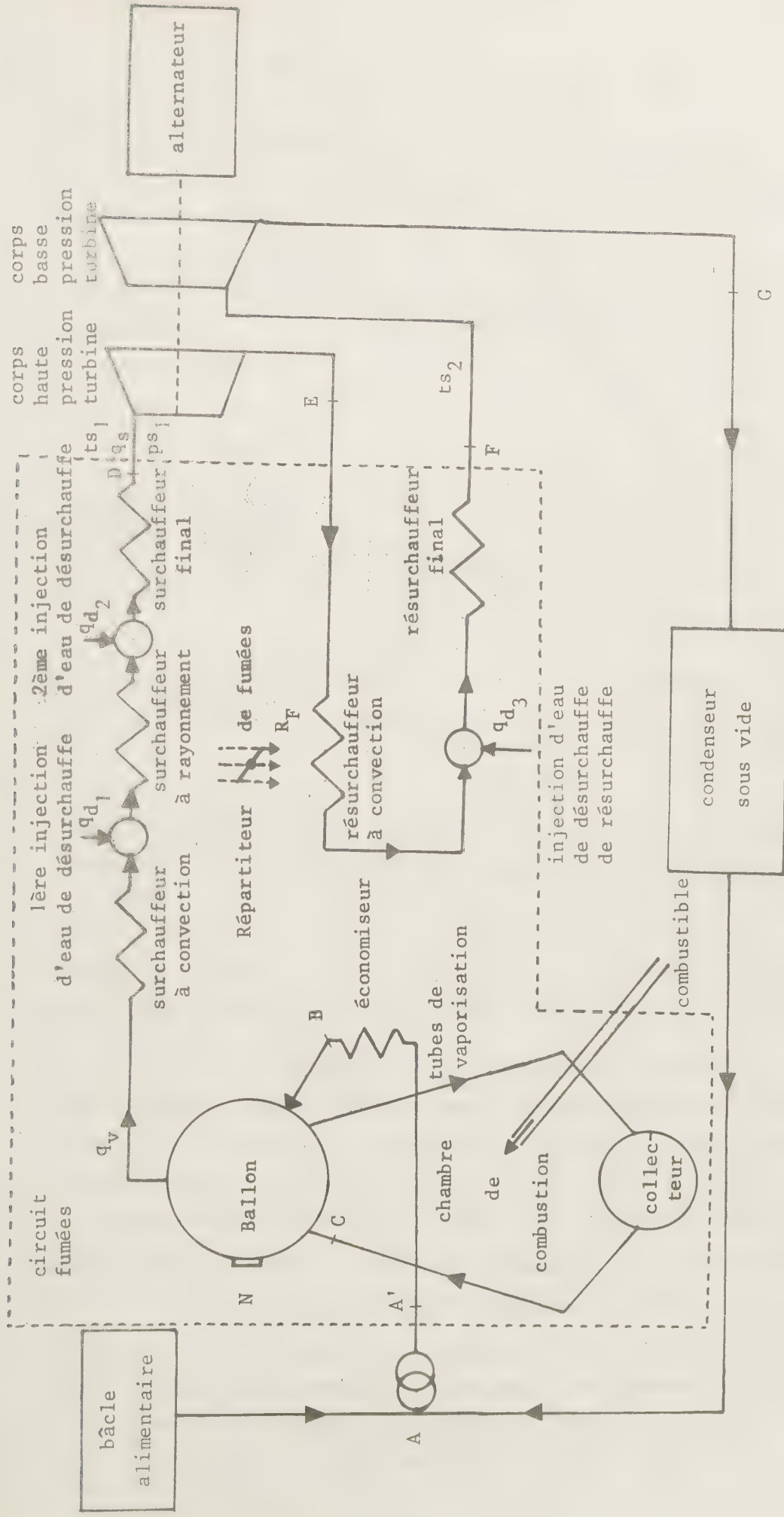


Fig. (4)

Un groupe de centrale thermique

Caractéristiques nominales type :

- Puissance : de 200 à 600 MW
- Pression de vapeur turbine : ≈ 160 bars
- Température vapeur turbine : $\approx 560^\circ \text{C}$.
- Chauffe tangentielle mixte : charbon - fuel

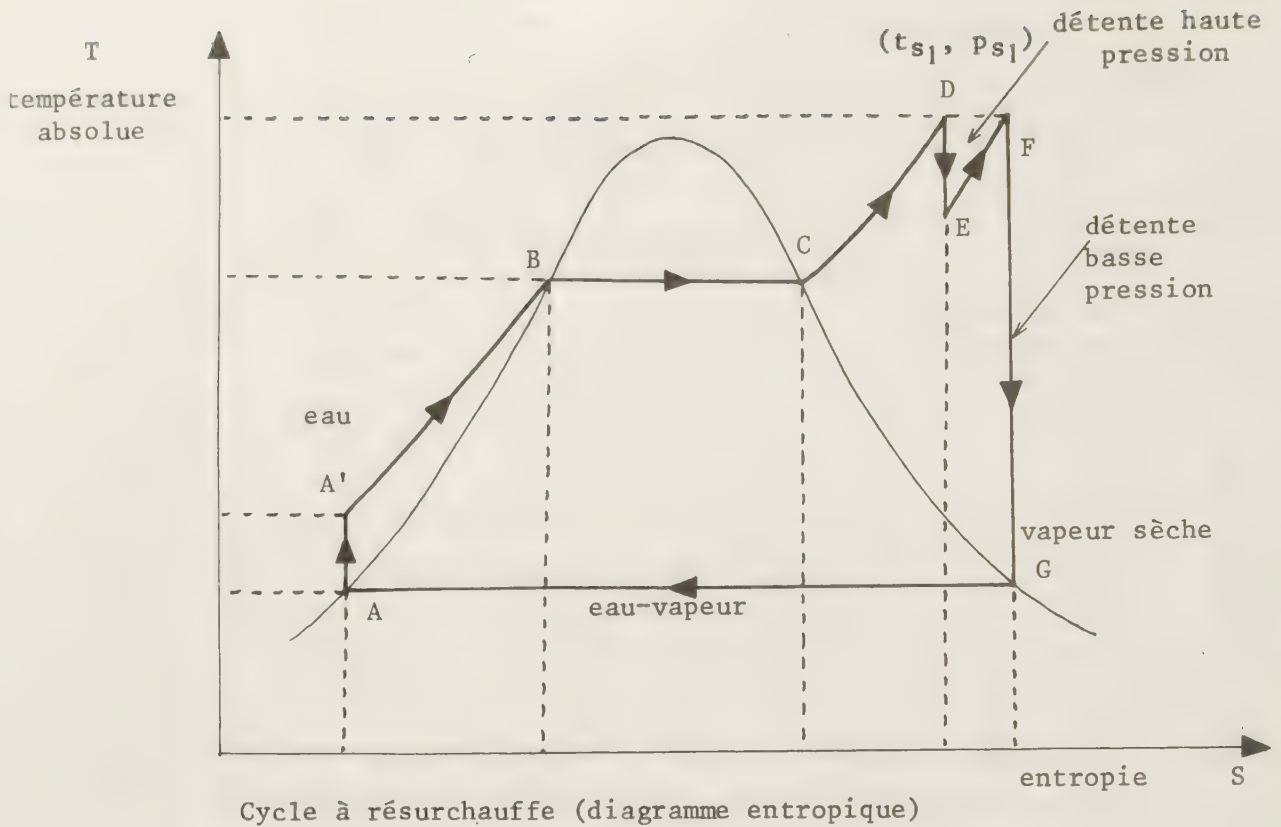


Fig. (5)

Le point de départ est en A sur les deux figures. L'eau alimentaire est pompée suivant AA' (isentropique) puis réchauffée dans l'économiseur selon l'isobare A'B. Ce débit d'eau q_e , qui est chargé de fournir le débit de vapeur saturée q_v et de maintenir constant le niveau n dans le ballon, est vaporisé dans les tubes de montée suivant BC, puis surchauffé jusqu'à la température t_{s1} (pression p_{s1}) selon CD dans un surchauffeur à 3 éléments muni de deux injections d'eau de désurchauffe (q_{d1} et q_{d2}) qui permettent le réglage de t_{s1} . La vapeur q_s est alors détendue à haute pression dans la turbine suivant DE, puis resurchauffée suivant EF jusqu'à la température t_{s2} . Celle-ci (t_{s2}) peut être réglée par le flux des fumées sur le resurchauffeur (R_f = répartition des fumées) par l'injection d'eau q_{d3} de désurchauffe du resurchauffeur ou éventuellement par l'inclinaison des brûleurs. La vapeur est enfin détendue à basse pression dans la turbine (FG) puis condensée suivant GA.

Outre le circuit eau - vapeur, il faut mentionner le circuit de combustion où le débit d'air q_a doit être tel que l'excès d'air (e) soit minimal (c'est-à-dire tel qu'on obtienne une combustion parfaite dépourvue d'imbrûlés) et ceci quel que soit le débit de combustible.

Les différentes grandeurs à régler (pression, température, niveau) dépendent également de la qualité du combustible (viscosité du fuel), de celle de l'eau (dégazage) et de celle de l'air (préchauffage), mais l'expérience montre qu'il est justifié de supposer que ces qualités se comportent comme des constantes.

Ceci signifie, soit que ces chaînes annexes (viscosité, dégazage, préchauffage) sont rapides par rapport aux chaînes principales (température, pression, niveau), soit que les chaînes principales sont peu sensibles aux "grandeurs annexes".

1-3 Régulation :

En définitive un générateur de vapeur de centrale se présente comme un processus :

* à sept grandeurs réglantes :

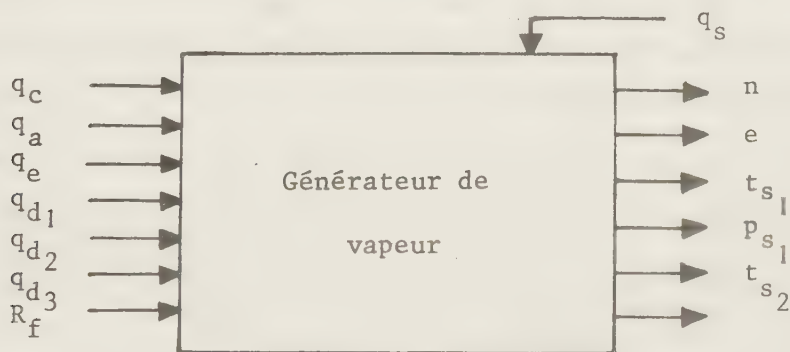


Fig. (6)

- le débit de combustible q_c
- le débit d'air q_a
- le débit d'eau alimentaire q_e
- les deux débits d'eau de désurchauffe q_{d1} et q_{d2}
- le débit d'eau de désurchauffe de rechauffe q_{d3}
- la répartition des fumées sur le résurchauffeur R_f

* et cinq grandeurs réglées :

- le niveau dans le ballon n
- l'excès d'air comburant e
- la température de vapeur surchauffée t_{s1}
- la température de vapeur résurchauffée t_{s2}
- la pression de vapeur amont turbine p_s

* et dont la perturbation principale est constituée par le débit de vapeur q_s .

Examinons maintenant les systèmes classiques de régulation concernant les grandeurs n , e , t_{s1} , t_{s2} , et p_s . Il n'est pas surprenant de constater que l'on a recherché la grandeur d'action prépondérante pour chaque grandeur réglée et qu'ainsi cinq boucles plus ou moins indépendantes sont généralement mises en oeuvre.

a) Le niveau dans le ballon n :

Le but recherché n'est pas, à proprement parler, de maintenir le niveau constant, mais plutôt de fournir constamment le débit d'eau alimentaire q_e capable de donner le débit de vapeur demandé q_v , ce qui ne revient pas au même, étant donnés les phénomènes de gonflement et de tassement du plan d'eau.

On a donc généralement une régulation dite à "3 éléments": q_e , q_v auquel on adjoint n , ce qui permet d'éviter une dérive du niveau due aux erreurs dynamiques de l'équation $q_e = q_v$.

Dans les chaudières récentes, dont les dimensions de ballon tendent à se réduire, il peut être souhaitable d'établir des régulations plus sophistiquées en regard des amplitudes permises pour les dépassements des réponses dynamiques d'un processus à phase non minimale.

b) L'excès d'air comburant e :

Dans le cas le plus simple, le débit d'air q_a est maintenu proportionnel au débit de combustible q_c ou mieux au débit de vapeur admission turbine q_s . Ce principe n'étant bon que si le flux calorifique est stationnaire (ce qui n'est pas le cas pour une chauffe au charbon), certains -4- ont imaginé de proportionner le débit d'air à un flux calorifique, calculé à partir des nombreuses mesures effectuées sur la chaudière.

Une autre possibilité consiste à utiliser une consigne $q_{ac} = f(q_c) + q_{ao}$ où les fonctions f et q_{ao} sont déterminées hors ligne au moyen d'un analyseur d'oxygène ou d'un chromatographe en phase gazeuse relevant la teneur des fumées en gaz carbonique. Enfin, une correction "en ligne" peut être effectuée par un opacimètre -3-.

c) La pression de vapeur surchauffée p_s à l'amont de la turbine :

Comme précédemment une grandeur de commande est prépondé-

rante : le débit de combustible. Le schéma classique de régulation comporte une boucle fermée sur la mesure de la pression et une tendance en chaîne ouverte, qui, en quelque sorte, ajuste l'énergie calorifique, due au combustible, à celle emportée par la vapeur q_v . Comme l'énergie calorifique qui élève la pression n'est due qu'au flux reçu par l'évaporateur, on pourra plutôt utiliser un flux évaporatoire calculé.

La pression subit naturellement de grandes variations ($\pm 5\%$) et aucun système de régulation ne peut les pallier en présence d'appels de vapeur imprévisibles : en effet, à une variation δq_s correspond une variation de pression en δq_s^2 . On s'efforce généralement de ramener ces écarts à zéro en temps minimal.

d) La température de vapeur surchauffée t_{s_1} :

Cette fois, trois grandeurs de commande agissent sur la température de surchauffe : q_c , q_{d_1} et q_{d_2} . Généralement le débit de combustible étant déterminé par la régulation de pression, on utilise essentiellement la première injection d'eau de désurchauffe q_{d_1} , la seconde n'intervenant que lorsque q_{d_1} devient trop fort, risquant ainsi d'amener en aval de l'injection la température à sa valeur de saturation. On a donc une boucle fermée sur t_{s_1} avec une "cascade" sur la température amont de l'élément final du surchauffeur, et une chaîne ouverte utilisant le débit de vapeur et éventuellement le flux calorifique ("calculé") sur le surchauffeur.

Les contraintes sur le métal de la turbine étant impératives, la température doit être maintenue autour de sa valeur nominale dans une fourchette n'excédant pas ± 5 à 10°C .

e) La température de vapeur resurchauffée t_{s_2} :

Cette chaîne est semblable à la précédente, la répartition des fumées R_f sur le premier resurchauffeur jouant le rôle de la première injection q_{d_1} . Ici, cependant, les deux grandeurs de commande q_{d_3} et R_f sont en boucle fermée simple sur la température t_{s_2} .

Là encore, l'écart admissible de température est de l'ordre de 5 à 10°C .

Pour terminer cette description des chaînes de régulation d'un générateur de vapeur de centrale thermique, il est bon d'indiquer que les coefficients des régulateurs sont eux-mêmes quelquefois fonction de la charge, ce

qui revient à considérer un système foncièrement non linéaire comme une suite de systèmes linéaires, et à assimiler lors d'un programme de charge en rampe un système non linéaire à un système linéaire non stationnaire.

1-4 Conclusion :

En définitive, une caractéristique essentielle et trois problèmes principaux de régulation sont apparus dans cette description.

a) La caractéristique essentielle :

La structure est telle que toutes les régulations sont monovariables, avec une quantité plus ou moins importante de tendances, introduites soit intuitivement, soit à la suite de simulations analogiques. Une fois de plus, il serait plus scientifique d'employer une théorie fournissant globalement la structure multivariable, quitte ensuite à supprimer les "tendances" à faibles coefficients.

b) Les trois problèmes principaux :

* Celui de la combustion, pour lequel il serait souhaitable de minimaliser à tout instant la quantité d'imbrûlés, ou plus généralement de maximaliser le rendement. Malheureusement il n'existe pas d'analyseur de fumées donnant une mesure continue ; l'opacimètre se révèle cependant un excellent palliatif. Dans le cas d'une chauffe au charbon et donc d'un pouvoir calorifique extrêmement fluctuant, le problème se présente comme une régulation extrême. La chauffe au fuel tendant à se généraliser, il semble cependant que la régulation de proportion, actuellement utilisée avec opacimètre, s'avère suffisante.

* Celui du niveau, pour lequel la "régulation trois éléments", sans adjonction de dynamique présente des lacunes dans le cas d'un ballon de dimensions réduites. Malheureusement l'unité pilote possède un ballon de dimensions importantes et l'eau alimentaire n'est pas réchauffée, ce qui engendre des phénomènes assez différents de ceux existant dans un ballon de chaudière de centrale. Ceci limite la validité de notre pilote en ce qui concerne la régulation de niveau.

* Celui de la surchauffe (pression et température), qui est, par son essence même, multivariable puisqu'une grandeur (le débit de combustible) fournit le flux calorifique total (sur l'évaporateur et le surchauffeur) et agit donc à la fois sur deux grandeurs de sortie (pression et température). Le réglage classique permet de "tenir" très bien la pression au moyen du combustible, mais la température ne peut être maintenue qu'au prix de grandes

variations du débit d'eau de désurchauffe qui provoquent la dégradation des injecteurs d'eau. Inversement, des variations trop importantes et trop rapides du débit de combustible engendrent des gradients de température inadmissibles sur les tubes de l'évaporateur et des surchauffeurs. Ce problème se présente donc comme parfaitement adapté à la régulation optimale dynamique fonctionnelle où un critère de performance contenant, d'une part des termes en Δp_s^2 et Δt_s^2 pour limiter les écarts de régulation, et d'autre part des termes en $\dot{q}_c^2$ et $\dot{q}_{d1}^2$ (et $\dot{q}_{d2}^2$) pour limiter les gradients de température du métal et les à-coups sur les vannes de réglage, est particulièrement indiqué.

La chaîne de surchauffe de l'unité pilote ne possède qu'une injection d'eau, mais l'aspect fondamental du problème de régulation, c'est-à-dire le couplage pression - température, se retrouve totalement. C'est donc sur cette chaîne que nous avons porté nos efforts, considérant par ailleurs que la combustion et le niveau sont réglés de manière classique.

Notons enfin que pression et température de résurchauffe constituent un problème identique à celui de pression et température de surchauffe, et qu'ainsi le fait que l'unité pilote soit dépourvue de résurchauffeur n'enlève rien à la possibilité théorique de généraliser nos résultats à une centrale.

2 - L'UNITE PILOTE -

2-1 Description :

L'ensemble est constitué d'une chaudière marine pouvant débiter 1500 kg/h. de vapeur à 20 bars, surchauffée à 300°C dans un groupe turbo-dynamo de 85 KW. La vapeur est ensuite condensée sous atmosphère. Notons également que l'eau d'alimentation est traitée dans un poste de déminéralisation.

La chaudière est du type symétrique, à circulation naturelle, avec réchauffage des tubes de descente. On peut suivre sur les figures 7 et 8 le cycle eau-vapeur à surchauffe. L'eau alimentaire est pompée de A à B (30 bars), réchauffée dans les tubes de descente ($\rightarrow$ B') puis vaporisée, donnant un débit q_v à la pression p_b (C). La vapeur est alors surchauffée jusqu'à la température t_s (D) (débit q_s , pression p_s), puis détendue dans la turbine (E) et condensée (A). La désurchauffe s'effectue par injection d'un débit d'eau q_d .

Nous nous intéressons donc essentiellement à la chaîne de surchauffe, considérant par ailleurs que le niveau possède un temps de réponse en boucle fermée beaucoup plus court que ceux de la pression et de la température et qu'à tout moment l'équation $q_e = q_v$ est vérifiée, ce qui permet pour l'équation de

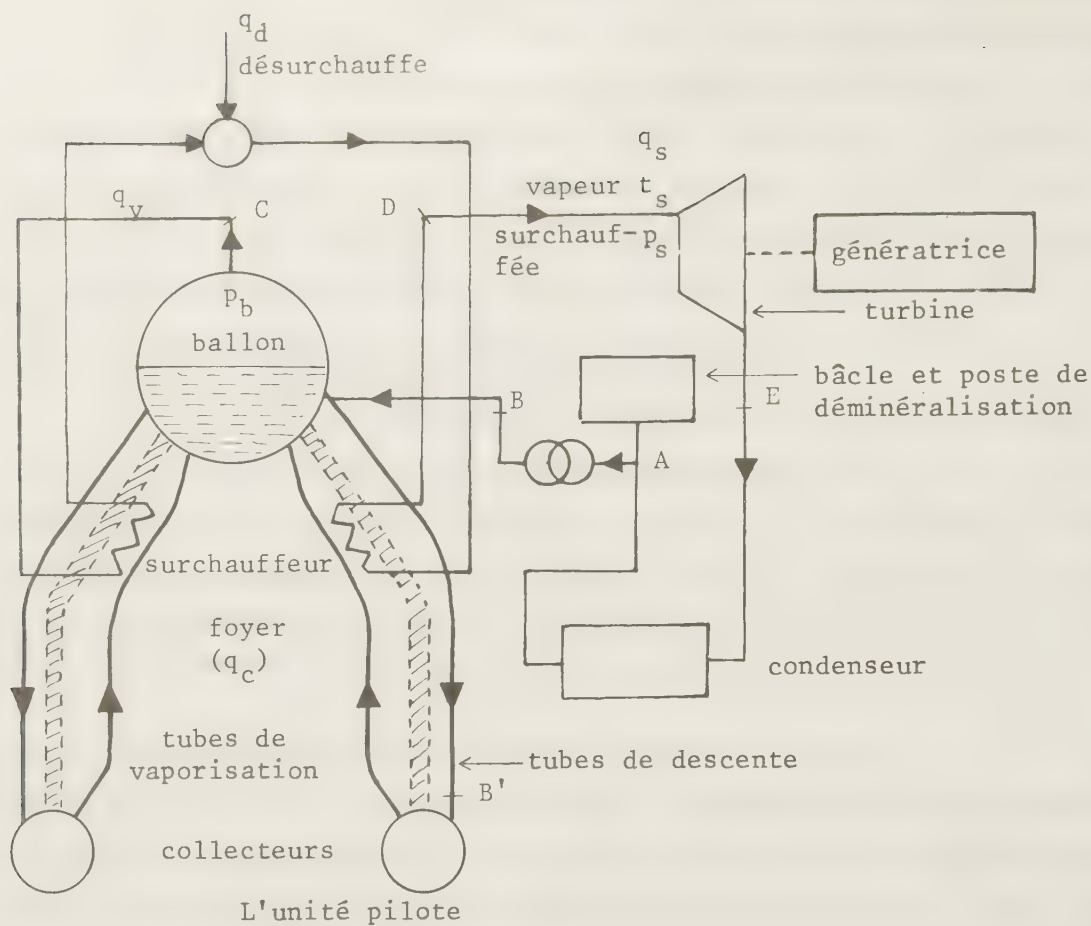
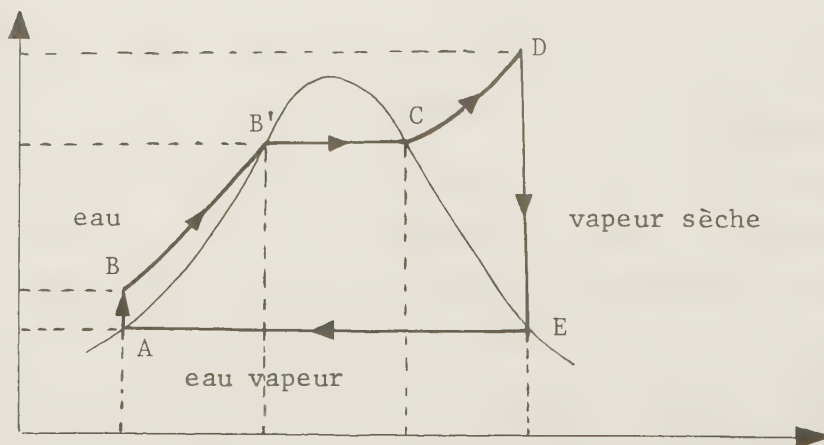


Fig. (7)



Cycle à surchauffe de l'unité pilote (diagramme entropique)

Fig. (8)

pression de négliger la grandeur de commande q_e (cf 2-2-2-1).

La chaîne de niveau est une régulation à 3 éléments. De même la combustion est réglée par deux chaînes fermées agissant sur les positions de la ventelle d'air comburant et du registre des fumées. Les consignes sont proportionnelles au débit du combustible (q_c). Là encore, les vitesses de réponses des deux chaînes permettent de dire que l'effet de la combustion sur la sur-

chauffe se retrouve dans les termes en q_c des équations de surchauffe, de même que l'influence du niveau (le ballon ayant des dimensions relativement importantes) est contenue dans les termes en q_v du modèle de surchauffe, ces termes pouvant être non linéaires.

Finalement, le problème de régulation principal de cette unité pilote concerne un système :

* à deux commandes :

- le débit de combustible q_c
- le débit de désurchauffe q_d

* à deux grandeurs réglées :

- la pression de vapeur surchauffée p_s
- la température de vapeur surchauffée t_s

* et à une perturbation prépondérante :

- le débit de vapeur à l'admission de la turbine (q_g) ; du fait que ce débit est assimilable à la puissance électrique demandée aux centrales thermiques, deux types de perturbations doivent être pris en considération :

- d'une part, des perturbations aléatoires de faible amplitude (10 à 20 %) effectuées autour d'une valeur de charge constante (légèrement au-dessous du maximum technique)

- d'autre part, des perturbations de grande amplitude en échelon ou en rampe, figurant la montée en charge, ou un réenclenchement, et qui produisent la mise en saturation des organes de commande.

Dans chacun des cas, la régulation devra éviter, à la fois, des écarts de température et de pression importants ($> \pm 5^\circ \text{C}$ et $> 1 \text{ bar}$), et des variations de température néfastes sur les tubes de vaporisation ainsi que des injections brusques d'eau de désurchauffe.

Afin de mettre en oeuvre cette régulation, il est nécessaire d'établir un modèle du sous-système température - pression.

2-2 Modèle mathématique de la chaîne de surchauffe :

2-2-1 Généralités :

L'identification d'un processus procède de différents points de vue, et, de ce fait, peut faire appel à des méthodes variées selon l'utilisation que l'on désire faire du produit de cette identification qui est

le modèle mathématique du processus.

Ici nous cherchons des équations d'état d'ordre le moins élevé possible et munies de leur domaine de validité, telles que le processus simulé et le processus réel se comportent d'une manière identique, une fois optimisés. En effet, l'optimisation n'a de sens que si l'on peut prévoir d'avance les modifications qu'apportera un changement d'un des coefficients du critère de performance, ce qui suppose effectivement que les trajectoires optimales simulées et celles suivies par le processus ne diffèrent que dans une faible mesure. Ces écarts ne sont, en outre, imposés que pour les conditions de fonctionnement réel du processus. Pour une centrale, par exemple, ces conditions concernent une charge aléatoire de caractéristique connue et une charge variant en rampe de pente quasiment imposée. Une bonne méthode de validation du modèle consiste, lorsqu'on dispose d'un calculateur, et que les perturbations sont mesurables, à piloter en parallèle le processus et le modèle initialisé par les mesures effectuées sur le processus. On s'estimera satisfait si les écarts entre les sorties homologues restent inférieurs à quelques % sur une période de l'ordre du temps de réponse que possèdera le système, une fois optimisé, et ceci, bien entendu, pour de multiples essais renouvelés dans des conditions différentes.

On objectera que cette expression "quelques %" n'a que peu de signification. Elle pourra cependant être précisée ultérieurement à la suite d'une étude succincte (en simulation) de la sensibilité de la forme des trajectoires optimales aux coefficients du modèle les plus approximatifs. D'autre part, nous savons d'après la première partie de ce rapport que, lors d'une optimisation stochastique, le calcul de l'optimiseur tient compte des informations concernant les erreurs de modèle.

Compte-tenu de ces précisions, deux étapes complémentaires permettront de déterminer un lot d'équations simples :

- une étape théorique qui propose la structure des équations,
- une étape expérimentale qui vérifie cette structure et fournit les coefficients.

2-2-2 Modèle théorique :

a) Equations de pression :

Le bilan d'énergie dans le circuit évaporateur, en supposant les dynamiques négligeables, se matérialise par :

$$\dot{E} = \phi + h_e q_e - h_v q_v$$

$$\text{Rappel } \begin{cases} q_e : \text{débit eau alimentaire} \\ q_v : \text{débit de vapeur} \end{cases}$$

ϕ = énergie calorifique apportée à l'évaporateur

h_e = enthalpie de l'eau alimentaire

h_v = enthalpie de la vapeur saturée

E = énergie emmagasinée dans l'évaporateur

* Il est vraisemblable d'assimiler ϕ à λq_c , du moins pour le fonctionnement en télé-réglage où q_c évolue autour d'une valeur moyenne.

* La régulation de niveau assure que $q_e = q_v$, donc :

$$\dot{E} = \lambda q_c + (h_e - h_v) q_v$$

* h_e est lié à la température de l'eau alimentaire et peut donc varier sensiblement, mais est faible devant h_v .

* h_v est fonction de la pression au ballon mais le diagramme de Mollier montre qu'elle est pratiquement constante à la pression considérée.

* La variation d'énergie emmagasinée $\dot{E}$ se retrouve dans la pression et dans le niveau (n). L'hypothèse la plus simple s'écrit :

$$\dot{E} = k_1 \dot{p}_b + k_2 \dot{n}$$

soit, finalement, puisque $\dot{n} = k (q_e - q_v)$, $\dot{p}_b = a q_c - b q_v$

ou, en exprimant toutes les grandeurs indépendantes :

$$\dot{p}_b = a q_c - b q_s + b q_d$$

Il reste à écrire la pression admission turbine en fonction de la pression du ballon : en négligeant les temps d'établissement de pression dans le surchauffeur, il subsiste l'influence des pertes de charge, qui sont proportionnelles au carré des débits. L'injection d'eau de désurchauffe étant faible devant le débit de vapeur (< 10 %), on peut considérer qu'il existe un débit unique dans l'ensemble du surchauffeur, et donc :

$$p_s = p_b - \mu q_s^2$$

b) Equations de température :

Une première démarche, identique à celle du début du

paragraphe 2-2-2-1, consiste à écrire un bilan d'énergie, abstraction faite de toute dynamique et le surchauffeur étant considéré globalement, d'où :

$$\dot{E} = \phi + h_v q_v + h_d q_d - h_s q_s$$

E = énergie emmagasinée par le surchauffeur

ϕ = énergie calorifique apportée au surchauffeur, proportionnelle au débit de combustible

h_d = enthalpie de l'eau de désurchauffe

h_s = enthalpie de la vapeur surchauffée, qui, cette fois, n'est pas constante (cf. diagramme de Mollier), mais doit être linéarisée autour des valeurs de consignes de p_s et t_s (la contribution de Δt_s étant prépondérante devant celle de Δp_s). Un terme non linéaire en $\Delta t_s q_s$ ou en $\Delta t_s \frac{q_s}{Q_s}$ ($Q = q_s$ moyen) interviendra donc.

On sait -6- qu'une hypothèse valable pour la variation d'énergie est son assimilation à la variation de température.

D'autre part, les échanges de chaleur ne sont pas instantanés et on aura des constantes de temps entre q_c , q_d , q_s et t_s .

La structure la plus simple serait :

$$\dot{\Delta t}_s = - \frac{q_s}{Q_s} (k_1 \Delta t_s) + k_2 q_c + k_3 q_d - k_4 q_s$$

en supposant qu'on puisse considérer que toutes les fonctions de transfert sont du premier ordre et de même constante de temps, ce qui est peu plausible.

2-2-3 Identification expérimentale :

La stabilité naturelle du processus permet d'effectuer quelques essais en boucle ouverte susceptibles de valider ou de parfaire la structure du modèle. Différents échelons sur q_c , q_d et q_s ont permis de constater l'exactitude de la structure des équations de pression ; en revanche, si un premier ordre est suffisant pour $\frac{\Delta t_s}{q_c}$ et $\frac{\Delta t_s}{q_s}$, un second ordre est nécessaire pour représenter $\frac{\Delta t_s}{q_d}$. Ces mêmes essais fournissent également des valeurs (approximatives) pour les coefficients des équations.

L'ajustement de ces coefficients est réalisé visuellement en utilisant une bande d'enregistrement sur processus rejouée en temps accéléré, en parallèle avec un modèle analogique piloté par les commandes et perturbations enregistrées. C'est en quelque sorte la "classique" méthode du modèle, non automatisée, qui du point de vue de l'ingénieur et du physicien, présente quan-

tité d'attraits.

On trouvera ci-après, quelques enregistrements simultanés du processus et du modèle permettant d'apprécier la finesse des équations, qui finalement s'écrivent :

$$\dot{p}_b = 0,000396 q_c - 0,0000325 (q_s - q_d)$$

$$p_s = p_b - 1,225 \left(\frac{q_s}{1000} \right)^2$$

$$\Delta \dot{t}_s = \frac{1}{154} \left(\frac{q_s}{Q_s} \right) \left[- (\Delta t_s - 2) + 1,25 (q_c - 80) - 0,1 (q_s - 1000) - \theta \right]$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{83} \left[- \theta + 1,375 (q_d - 40) \right]$$

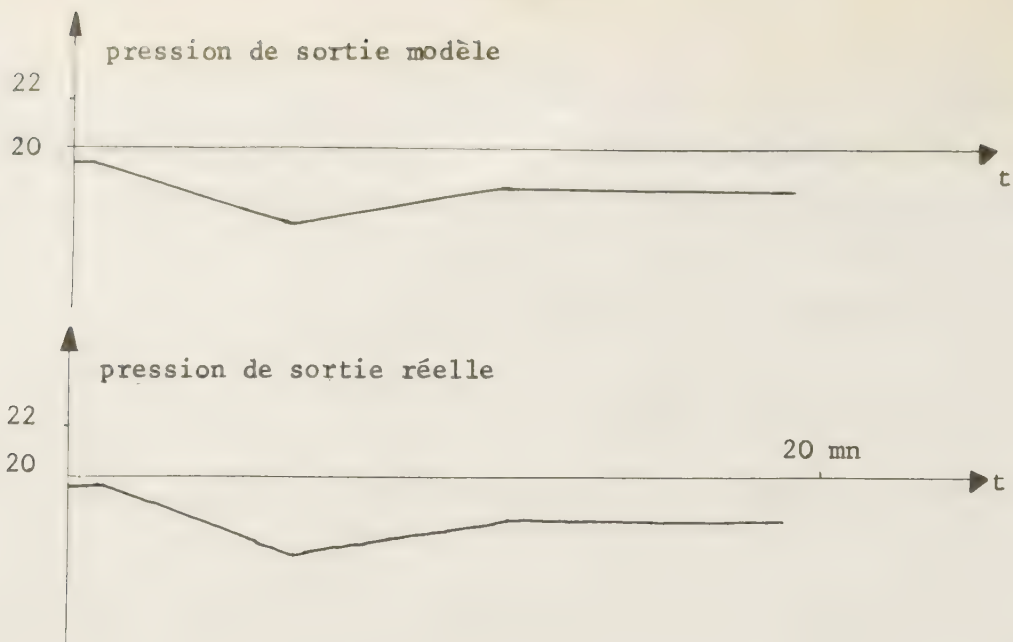
$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} Q_s = \text{constante} \\ p \text{ en bar/seconde} \\ q \text{ en kg/h} \\ \Delta t_s \text{ en } ^\circ\text{C (consigne} = 300^\circ\text{C)} \\ \theta \text{ en } ^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

Indiquons, pour terminer, qu'une version stochastique et automatisée de la méthode du modèle a été développée et mise au point dans notre laboratoire - 8-. Coefficients et états sont alors estimés de manière sous optimale à l'aide d'un filtre de Kalman - Bucy appliqué aux équations d'état et de sortie linéarisées du premier ordre en tenant compte des termes du second ordre. Cette méthode permet l'identification en ligne du générateur de vapeur, et pourrait, s'il en était besoin, notamment pour des systèmes à coefficients lentement variables dans le temps, se combiner aux optimaliseurs développés ici.

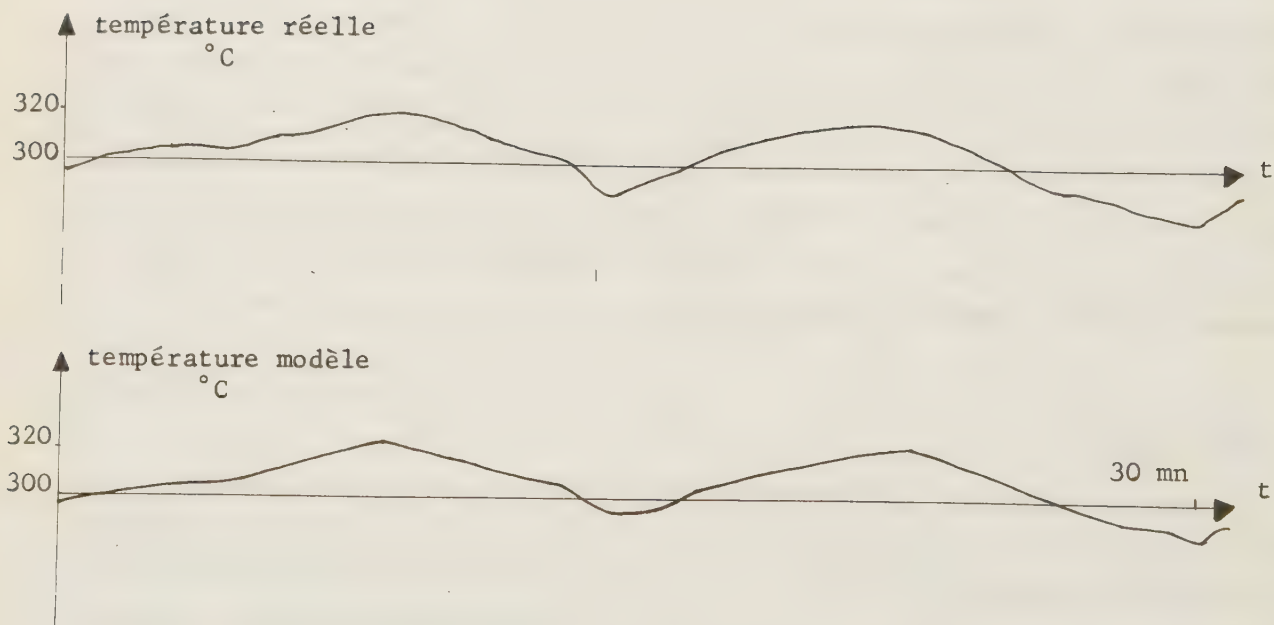
3 - CONCLUSION -

Si le générateur de vapeur pilote présente une validité queque peu limitée en ce qui concerne le comportement du niveau dans le ballon (dimensions du ballon relativement importantes, pas de réchauffage de l'eau alimentaire), on y retrouve, en revanche, le sous-système multivariable "pression - température de surchauffe" qui offre, dans une centrale, des difficultés de réglage dues au fait que le débit du combustible commande à la fois la pression et la température.

Il y a, pour ce sous-système, sur le plan régulation, un compromis à trouver entre, d'une part, les écarts de régulation (Δt_s et Δp_s) et, d'autre



Enregistrements simultanés des "pressions processus et modèle"



Enregistrements simultanés des "températures processus et modèle"

part, les variations de température des tubes de vaporisateur et de surchauffe, ainsi que de l'injecteur d'eau de désurchauffe (variations assimilables à q_c et q_d).

C'est l'objet même de la régulation fonctionnelle dynamique qui devra, en l'occurrence, réagir vis-à-vis de deux types de variations du débit de vapeur (constituant la perturbation principale en tant qu'image quasi instantanée de la demande de puissance électrique) :

- des variations aléatoires de faible amplitude (10 à 15 %) autour d'une valeur nominale. Ceci correspond au fonctionnement en télé réglage des centrales ;

- des variations déterministes de grande amplitude, correspondant, par exemple, à une montée de charge. Dans ce cas, on devra tenir compte de l'existence de butées sur les organes réglants et d'éventuelles contraintes sur les états.

En outre, cette régulation fonctionnelle, qui suppose le niveau et la combustion réglés de manière classique, avec des temps de réponse très inférieurs à ceux de la pression et de la température de vapeur surchauffée, sera déterminée à l'aide d'un modèle d'état qu'on a pu établir à trois dimensions.

- REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES -

- 1- RICHARD J. - Equipement thermique des usines génératrices d'énergie électrique - DUNOD 1961.

- 2- GOUJON M. - Centrale de Nantes-Cheviré
 MIOSSEC C. "Régulation des températures de vapeur"
 Rapport AMP 54 - juillet 1969 - EDF -
 Direction des études et recherches.

- 3- Rapport interne - "Régulation chaudière"
 centrale de
 Nantes-Cheviré
 1969

- 4- BERLEMONT V. - "Réglage paramétrique d'une chaudière à ballon uti-
 DEBELLE J. et autres lisant les calculateurs de flux"
 Séminaire international sur "l'automatisation dans
 la production et la distribution de l'énergie élec-
 trique"
 BRUXELLES 18-22 avril 1966 - DUNOD 1967 - Presses
 académiques de Bruxelles - pp. 163-177.

- 5- BERLEMONT V. - "Modèle mathématique d'une chaudière à ballon"
 DEBELLE J. et autres Idem à 4 - pp. 74-96.

- 6- LE CORRE J.F. - "Régulation autoadaptative d'une chaudière"
 Thèse d'état (1969) - Université de Nantes -
 Chapitre II.

- 7- AZEMA M. - "Commande sous-optimale par algorithmes d'apprentis-
 sage - Application à la commande en ligne d'une
 chaudière"
 12/9/70 Thèse Ingénieur-Docteur - Université de
 Nantes - Chapitre I.

- 8- DE LARMINAT Ph. - "Etude d'une régulation optimale"
 THOMAS Y. Rapport final D.G.R.S.T. 68-01-409 (annexe I -
 de LARMINAT) Publication E.N.S.M. Juin 1970.

THREE